# PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 22. 1. November 1907. 8. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 23 am 11. November 1907.

INHALT.

**Originalmitteilungen:**

A. Righi, Über die elektromagnetische Masse des Elektrons. S. 801.

M. Levin, Notiz über den Radiumgehalt von Uranpräparaten. S. 802.

G. Rümelin, Über die Periode der Radium-Emanation. S. 803.

A. Sommerfeld, Über den Wechselstromwiderstand der Spulen. S. 805.

Mitteilungen aus dem physikalischen Institut der Universität Pisa:
No. 36: A. Battelli, Theoretische und experimentelle Untersuchungen über den elektrischen Leitungswiderstand der Solenoide für Ströme hoher Frequenz. IV. S. 809.

G. F. C. Searle, Über die Kraft, welche erforderlich ist, um eine in Bewegung befindliche elektrisierte Kugel aufzuhalten. S. 811.

W. Winter, Neue Beobachtungen bei einer an einem Pol der Sekundärspule eines Teslatransformators strahlenden Antenne. S. 820.

H. J. Reiff, Leuchtschilder für den Experimentiertisch bei verdunkeltem Hörsaal. S. 826.

J. J. Taudin Chabot, Das Marmarometer oder Resonanzflimmerphotometer. S. 826.

E. Meyer, Die Berechnung der Durchbiegung von Stäben, deren Material dem Hookeschen Gesetze nicht folgt. S. 827.

**Besprechungen:**

W. Nernst, Theoretische Chemie. S. 831.

C. Burrau, Tafeln und Funktionen. Cosinus und Sinus. S. 832.

H. Thiene, Temperatur und Zustand des Erdinnern. S. 832.

H. Spyri, Die Antriebsmotoren für elektrische Stromerzeuger. S. 832.

Th. Hofmeister, Der Gummidruck. S. 832.

**Personalien.** S. 832.

## ORIGINALMITTEILUNGEN.

### Über die elektromagnetische Masse des Elektrons.

(Bemerkungen zu der Mitteilung des Herrn Pockels.[1])

Von Augusto Righi.

Ich bin Herrn Pockels für die Beachtung dankbar, die er einer bescheidenen Veröffentlichung von mir[2]), der ich nur geringen Wert beilege, geschenkt hat.

Der Hauptpunkt dieser Veröffentlichung, nämlich der von mir erhobene Einwand gegen die allgemein übliche Definitionsweise des Elektrons als einer bestimmten Elektrizitätsverteilung, hatte in der Tat keinen weiteren Zweck, als zu einer Abänderung dieser Definitionsweise anzuregen, um eine bessere Übereinstimmung mit der Auffassung des Elektrons als eines unteilbaren Atomes der Elektrizität herbeizuführen. Wenn man zu einer anderen Auffassung meiner Veröffentlichung hat gelangen können, so erklärt sich dies leicht aus der bekannten Tatsache, daß selbst bei der besten Übersetzung aus einer Sprache in eine andere gewisse kleine Nuancen verwischt werden können, welche den genauen Sinn der Ausdrücke modifizieren. Es ist daher beinahe überflüssig, hier nochmals zu wiederholen, daß, abgesehen von der grundlegenden Definition, die überaus beachtenswerten Berechnungen des Herrn Abraham und anderer Forscher in meinen Augen nichts von ihrer außerordentlichen Bedeutung einbüßen.

Daß nun mein Einwand nicht unbegründet ist, geht schon aus dem Umstande hervor, daß Herr Pockels über die von ihm vorgeschlagene neue Definition: „Das Elektron ist ein unveränderlicher kugelförmiger Bereich im Äther, innerhalb dessen die Divergenz der elektrischen Erregung einen konstanten von Null verschiedenen Wert besitzt", selbst mit folgenden Worten urteilt: „Freilich hat die so formulierte Annahme auch etwas von ihrer Anschaulichkeit verloren". In der Tat wird diese neue Definition vielleicht den physikalischen Mathematiker hinreichend zu befriedigen vermögen, indessen wird sie wohl keine gleich günstige Aufnahme bei denen finden, die unter Zugrundelegung des Elektrons ein allgemeines Modell der Erscheinungen zu konstruieren suchen.

Ich habe nun einen neuen Weg für die Auffassung des Elektrons vorschlagen wollen und dazu für den Äther eine Eigenschaft vorausgesetzt, die in gewissem Maße der Elektrizitätsgrenze ähnelt. Damit habe ich aber nicht beansprucht, eine Theorie aufzustellen, welche besser wäre als die bereits vorhandenen, ja ich hätte einen derartig anmaßenden Gedanken schon deshalb nicht fassen können, weil ich mich auf die Betrachtung des einfachen Falles der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung habe beschränken müssen. Ich habe, um ein Beispiel zu wählen, einen oberen Grenzwert für die elektrische Kraft angenommen, gerade wie ich einen solchen für die in jedem Volumenelement des Äthers enthaltene Energie hätte annehmen können. All dieses sollte aber nur dazu dienen, einen der vielen möglichen Wege anzudeuten, welche man einschlagen kann, wenn man die neue Auffassung annimmt.

Ich muß endlich noch bemerken, daß ich die Bemerkung des Herrn Pockels nicht verdient zu haben glaube, wenn er behauptet, daß

1) Diese Zeitschr. **8**, 393, 1907.
2) Diese Zeitschr. **8**, 161, 1907.

die Masse des Elektrons in meiner Auffassung „physikalisch bedeutungslos" ist. Meiner Ansicht nach ist vielmehr die physikalische Bedeutung der Masse des Elektrons als der Masse, welche ein materieller Punkt haben müßte, um, mit gleicher Geschwindigkeit wie das Elektron begabt, eine kinetische Energie gleich dem Energiezuwachs des Elektrons infolge seiner Bewegung zu besitzen, durchaus klar und entsteht gleichsam von selbst in der Vorstellung dessen, der sich auf den Standpunkt der Hypothese stellt, nach welcher die Atome sämtlich Systeme von Elektronen sein sollen.

Bologna, im August 1907.

(Aus dem Italienischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 13. August 1907.)

## Notiz über den Radiumgehalt von Uranpräparaten.

Von M. Levin.

Die im folgenden mitgeteilten Versuche wurden unternommen, um zu untersuchen, ob zwischen dem Alter älterer Uranpräparate und ihrem Radiumgehalt eine einfache Beziehung besteht.

Eine Anzahl von Uranpräparaten, deren Alter bekannt war, wurde durch Messung des Emanationsgehaltes ihrer Lösungen auf ihren Radiumgehalt in bekannter Weise [1]) untersucht. Wenn die Lösungen nicht so lange geschlossen gestanden hatten, daß die Emanationsmenge den Gleichgewichtsbetrag erreicht hatte, wurde die Gleichgewichtsaktivität $\mathcal{J}_0$ nach der Gleichung

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

berechnet, in der $T$ die Periode der Emanation bedeutet. Für $T$ wurde der Wert 3,75 Tage verwandt. [1])

Aus den gemessenen Aktivitäten wurden die von den Uranlösungen abgegebenen Emanationsmengen durch Vergleich mit einer Radiumbromidlösung von bekanntem Radiumgehalt bestimmt. Die Radiumlösung, deren Besitz ich der Liebenswürdigkeit von Herrn Professor E. Rutherford verdanke, enthielt im Kubikcentimeter $0{,}27 \cdot 10^{-8}$ g Radiumbromid, oder unter Voraussetzung der Formel $Ra\,Br_2$ für die Zusammensetzung des Radiumbromids und der Zahl 225 für das Atomgewicht des Radiums, $0{,}158 \cdot 10^{-8}$ g Radium im Kubikcentimeter. Die Entladungsgeschwindigkeit, welche das benutzte Emanationselektroskop durch die von 1 ccm dieser Lösung im Gleichgewichtszustande abgegebene Emanationsmenge erfuhr, betrug 0,06 Skalenteile pro Sekunde.

In der Tabelle I sind die Resultate von Beobachtungen an einer Reihe älterer Uranpräparate zusammengestellt. In der Tabelle bedeutet $p$ den Urangehalt des untersuchten Salzes, $\mathcal{J}$ die Aktivität der Emanation, die im Gleichgewicht pro Gramm Uran entwickelt wird, $n$ die Radiummenge in Grammen, der diese Emanationsmenge entspricht. Die in der letzten Kolonne unter

$$N = \frac{n \cdot 10^{10}}{3{,}8}$$

zusammengestellten Werte geben den beobachteten Radiumgehalt in Promillen der Radiummenge $3{,}8 \cdot 10^{-7}$ g, die nach den Versuchen von Rutherford und Boltwood [2]) in Uranmineralien pro Gramm Uran enthalten ist, also des Betrages, der dem radioaktiven Gleichgewicht zwischen Uran und Radium entsprechen würde.

In der Tabelle II sind die Versuche mit einer Anzahl von Uransalzen unbekannten

1) Vgl. Rutherford, Radioaktivität (1907), VII. Kap.

1) Vgl. die nachfolgende Arbeit von G. Rümelin.

2) Vgl. Rutherford, Radioaktive Umwandlungen (1907), S. 155.

Tabelle I.

| Salz | Bezugsquelle | Alter des Salzes | $p$ | $\mathcal{J}$ | $n$ | $N = \frac{n \cdot 10^{10}}{3{,}8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Uranacetat I. Krist. | Kahlbaum | 25 Jahre | 57,5 % | 0,0240 | $6{,}33 \cdot 10^{-10}$ | 1,67 |
| Uranacetat II. Krist. | „ | 25 „ | 55,7 % | 0,0773 | 20,30 „ | 5,35 |
| Uranhydroxyd | Chemisches Lab. d. Univ. Göttingen | 20 „ *) | 70,0 % | 0,0053 | 1,39 „ | 0,366 |
| Uranylammoniumkarbonat | „ | 20 „ *) | 47,1 % | 0,0363 | 9,55 „ | 2,51 |
| Uranylbromid | Merck | 15 „ | 49,0 % | 0,0038 | 1,0 „ | 0,263 |
| Uransaures $Na$ | Kahlbaum | 14 „ | 62,5 % | 0,0145 | 3,81 „ | 1,02 |
| Uranylbenzoat | Merck | 11 „ | 38,0 % | 0,0014 | 0,37 „ | 0,098 |

*) Diese Zahlen stellen Minimalwerte dar.

Alters, aber wahrscheinlich neueren Herstellungsdatums, zum Vergleich zusammengestellt; diese Präparate sind von der Firma E. Merck bezogen worden.

Tabelle II.

| Salz | $p$ | $\mathcal{J}$ | $n$ | $N = \frac{n \cdot 10^{10}}{3{,}8}$ |
|---|---|---|---|---|
| Uranylnitrat | 45,6 % | 0,00044 | 0,116 . $10^{10}$ | 0,031 |
| Uranylnitrat (puriss.) | 46,8 % | 0,00088 | 0,232 „ | 0,061 |
| Uranylborat | 64,0 % | 0,0094 | 2,47 „ | 0,650 |
| Uranoxyd (rot) | 73,0 % | 0,021 | 5,55 „ | 1,460 |

Aus der ersten Tabelle geht hervor, daß der Radiumgehalt der Uranpräparate ihrem Alter nicht proportional ist, wie zu erwarten wäre, wenn die gemessenen Radiummengen in den Präparaten seit deren Herstellung aus einer Umwandlung des Urans entstanden wären. Es ist vielmehr anzunehmen, daß der Radiumgehalt größtenteils von einer unvollkommenen Befreiung des Urans vom Radium bei der Darstellung der Präparate herrührt. Hierfür spricht auch der Umstand, daß der Radiumgehalt von der Herstellungsweise der Präparate abhängig ist, wie aus dem Vergleich der beiden essigsauren Salze hervorgeht. Das als II. Kristallisation bezeichnete Acetat der Tabelle I, also das voraussichtlich unreinere Präparat, hat nämlich einen mehr als dreimal größeren Radiumgehalt als das Acetat erster Fraktion. Aus der letzten Spalte der ersten Tabelle ist ferner ersichtlich, daß die Bildung des Radiums in den meisten Uranpräparaten, anfängliche Abwesenheit von Radium vorausgesetzt, mit Geschwindigkeiten erfolgt sein müßte, die mit der Zerfallsgeschwindigkeit des Radiums vergleichbar und also etwa 10000 mal größer wären, als der in reinen Uranlösungen beobachtete Wert.[1]) Es ist daher nicht festzustellen, ob der Umstand, daß der Radiumgehalt bei den in der ersten Tabelle zusammengestellten Präparaten im Durchschnitt größer ist als bei denen der zweiten, auf mehr als einem Zufall beruht. Die zweite Tabelle lehrt, daß frisch bezogene, „reine" Uranpräparate einen erheblichen Radiumgehalt besitzen.

Es wäre denkbar, daß der hohe Radiumgehalt der älteren Präparate daher rührte, daß bei der Darstellung der Salze der hypothetische Zwischenkörper zwischen Uran und Radium bei dem Uran verblieben wäre. In diesem Falle müßten die Lösungen allmählich eine stärkere Zunahme des Radiumgehaltes als speziell gereinigte Uranpräparate erfahren. Einstweilen dürfte aus den oben mitgeteilten Versuchen geschlossen werden können, daß die Untersuchung älterer Uranpräparate wenig Aussicht bietet, die Frage, ob Radium aus Uran entsteht, direkt zu entscheiden, oder über den Mechanismus dieser Bildung Aufklärung zu schaffen.

Im Verlauf der vorstehend mitgeteilten Untersuchungen wurde auch ein Aktiniumpräparat von etwa 3 Gramm des Gieselschen Emanationskörpers auf seinen Emanationsgehalt untersucht. Die Lösung des Präparates hatte vor Beginn der Messung 45 Tage lang verschlossen gestanden. Die Aktivitätskurve zeigte die für die Radiumemanation charakteristische Form. Drei Stunden nachdem die Emanation in das Elektroskop eingeblasen war, wurde ein Maximum der Aktivität erreicht, die dann nach einem Exponentialgesetz mit einer Periode von 3,73 Tagen abfiel; der Radiumgehalt betrug $45 \cdot 10^{-10}$ g *Ra*. Die Bildung einer langlebigen Emanation, wie sie von Giesel[1]) an starken Aktiniumpräparaten beobachtet worden ist, ließ sich also bei der untersuchten Substanz nicht nachweisen.

Herrn Geh. Rat Prof. Dr. O. Wallach spreche ich auch an dieser Stelle für die gütige Überlassung von Uranpräparaten den verbindlichsten Dank aus.

1) Vgl. Rutherford, Radioaktive Umwandlungen (1907), S. 157.

1) Giesel, Ber. d. deutsch. chem. Ges. **40**, 3011 (1907).

Göttingen, Institut für anorgan. Chemie, 18. Sept. 1907.

(Eingegangen 22. September 1907.)

## Über die Periode der Radium-Emanation.

Von G. Rümelin.

Die Periode der Radiumemanation, die Zeit, in der sie nach einem Exponentialgesetz zur Hälfte zerfällt, ist eine Konstante, deren genaue Kenntnis wünschenswert ist. Wie nachstehende Zusammenstellung zeigt, weichen die vorhandenen Angaben über den Wert dieser Konstante nicht unerheblich voneinander ab:

| | |
|---|---|
| Curie[1]) . . . . . | 3,99 Tage |
| Rutherford und Soddy[2]) | 3,77 „ |
| Bumstead und Wheeler[3]) | 3,88 „ |
| Sackur[4]) . . . . . | 3,86 „ |

Curie, Bumstead und Wheeler verfolgten das Abklingen einer Quantität der Emanation in einem geschlossenen Gefäß durch Messung des Sättigungsstromes; Rutherford und Soddy, sowie Sackur benutzten ein Vorratsgefäß emanationshaltiger Luft, von dem zu verschie-

1) Compt. rend. **135**, 857, 1902.
2) Phil. Mag. April 1903.
3) Amer. Journ. Science Febr. 1904.
4) Ber. d. d. chem. Ges. **38**, 1754, 1905.

denen Zeiten gemessene Volumina abgetrennt und in ein Meßgefäß übergeführt wurden. Da bei genauen Bestimmungen die Messungen sich über ein genügend langes Zeitintervall, mehrere Wochen, erstrecken müssen, während welcher Zeit die Aktivität des Gesamtquantums auf einen kleinen Bruchteil des anfänglichen Wertes sinkt, so ist bei der ersten Methode eine elektrometrische Messung von Ionisierungsstärken sehr verschiedener Größe erforderlich. Dies ist ein Nachteil, da die Wanderungsgeschwindigkeit der Elektrometernadel nicht proportional, sondern im allgemeinen langsamer wächst, als die sie bewirkende Stromstärke. Infolge davon wird die Periode zu groß gefunden. Die zweite Methode kann diese Fehlerquelle vermeiden, indem bei Beginn des Versuchs geringere Volumina emanationshaltiger Luft in das Meßgefäß transportiert werden, als am Ende desselben, so daß stets annähernd die gleichen Ionisationsströme gemessen werden; nur ist hier die Gefahr vorhanden, daß beim Transport Verluste und beim Abtrennen Störungen in der gleichförmigen Verteilung der Emanation in der sie enthaltenden Luftmenge auftreten. Die nachstehend beschriebenen Versuche verfolgten den Zweck, eine Bestimmung der Konstante der *Ra*-Emanation auszuführen, bei der die angegebenen Fehlerquellen möglichst vermieden werden sollten.

Sind zwei miteinander kommunizierende Volumina $V_1$ und $V_2$ mit emanationshaltiger Luft gefüllt, und gibt, nachdem die Kommunikation unterbrochen, $V_1$ zur Zeit $t = 0$ den Strom $i_1$ in einem passenden Meßgefäß, $V_2$ in demselben Gefäß zur Zeit $t = t$ den Strom $i_2$, so berechnet sich aus diesen Daten die Halbwertzeit zu:

$$T = \frac{t \log 2}{\log \frac{V_2}{V_1} - \log \frac{i_2}{i_1}},$$

wobei angenommen ist, daß das Abklingen genau einem Exponentialgesetze folgt.

Zur Erzielung genauer Resultate ist es vorteilhaft, $t$ und $\frac{V_2}{V_1}$ möglichst groß und zwar so zu wählen, daß die beiden Ströme $i_1$ und $i_2$ nahe gleich groß werden. Hierdurch wird erreicht, daß das Meßinstrument, im vorliegenden Falle ein Elektroskop, am Anfang und am Ende des Versuchs unter denselben Bedingungen und nicht in weitem Meßbereich benutzt wird.

Um den Einfluß von Schwankungen der Temperatur und des Luftdrucks, sowie eventueller Änderungen der Empfindlichkeit des Goldblatts zu eliminieren, wurden die beobachteten Wanderungsgeschwindigkeiten nach Abzug der natürlichen Zerstreuung nicht direkt für $\frac{i_2}{i_1}$ eingesetzt, sondern es wurde unmittelbar vor dem Einbringen der Emanation in das Meßgefäß außer der natürlichen Zerstreuung noch der Strom gemessen, den die $\gamma$-Strahlen einer luftdicht verschlossenen Radiumprobe, die in eine bestimmte Stellung in die Nähe des Elektroskops gebracht war, hervorriefen. Diese Messung diente als Eichung. Nach dem Einbringen der Emanation wurde das Meßgefäß luftdicht verschlossen und nach 3 Stunden die Ablesung ausgeführt, da dann während der Zeit, die sie beanspruchten, die Wanderungsgeschwindigkeiten merklich konstant blieben.

Ein luftdicht verschlossener Glaskolben enthielt etwas *Ra*-$Br_2$-Lösung; die zur Messung dienenden Emanationsmengen wurden durch Kochen der Lösung und Auffangen der entweichenden Luft über Wasser gesammelt. Ein ganz aus Glas geblasenes Gefäß von der in Fig. 1 angegebenen Gestalt wurde mit einer

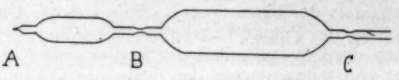


Fig. 1.

Wasserstrahlpumpe evakuiert, die gesammelte Menge Luft + Emanation in das Gefäß eingelassen, hierauf wurde bei $C$ abgeschmolzen. Das Gefäß wurde dann in einem Raum konstanter Temperatur mehrere Tage sich selbst überlassen, um sicher zu sein, daß sich die Emanation gleichförmig durch Diffusion in dem Gas verteilte. Um dies zu erleichtern, wurde nur so viel Luft mit der Emanation in das Gefäß eingelassen, daß der Druck etwa $^1/_2$ Atm. betrug. Hierauf wurde das Gefäß bei $B$ getrennt, wobei darauf geachtet wurde, daß nur die unmittelbare Umgebung der Trennungsstelle erwärmt wurde. Die in dem kleinen Gefäß $V_1$ befindliche Emanation wurde nun mittels eines Dampfstroms in einen mit dem Elektroskop verbundenen Gasbehälter übergeführt. Die hierbei verwendete Anordnung zeigt nachstehende Fig. 2.

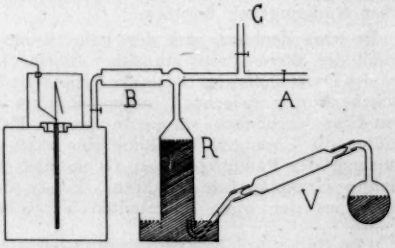


Fig. 2.

| $V_1$ | $V_2$ | $i_1$ Sk.-T./Min. | $i_2$ Sk.-T./Min. | $t$ | $T$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 36,0 cc | 275 cc | 34,2 | 37,1 | 10,60 Tage | 3,76 Tage |
| 36,95 „ | 143 „ | 27,0 „ | 29,8 „ | 6,81 „ | 3,78 „ |
| 29,6 „ | 283 „ | 34,1 „ | 30,1 „ | 12,79 „ | 3,75 „ |
| 22,9 „ | 270,5 „ | 53,0 „ | 54,4 „ | 13,00 „ | 3,71 „ |
| 26,2 „ | 244 „ | 14,40 „ | 14,16 „ | 11,94 „ | 3,80 „ |
| 54,3 „ | 243 „ | 44 9 „ | 30,8 „ | 10,00 „ | 3,70 „ |
| 24,0 „ | 272,5 „ | 12,98 „ | 11,22 „ | 13,96 „ | 3,76 „ |
| 31,8 „ | 140,1 „ | 42,9 „ | 37,0 „ | 7,16 „ | 3,72 „ |
| | | | | | 3,75 Tage |

Die ausgezogenen Enden von $V_1$ wurden mittels einer Flachzange unter dichten Gummiverbindungen zertrümmert. Durch längeres Durchleiten eines kräftigen Dampfstromes wurde die in $V_1$ enthaltene Luft in dem Gefäß $R$ über Wasser aufgefangen. Hierauf wurde das Zerstreuungsgefäß von $C$ aus mit der Wasserstrahlpumpe evakuiert, sodann mittels eines Dreiweghahns die gesammelte Gasmenge durch eine Watte und Phosphorpentoxyd enthaltende Röhre $B$ in dasselbe hineingeleitet; schließlich wurde durch Zuströmenlassen von reiner Luft bei $A$ der Atmosphärendruck im Apparate hergestellt und gleichzeitig die letzten Reste der Emanation in das Zerstreuungsgefäß getrieben.

Drei Stunden später wurde die Zerstreuung gemessen, hierauf die Emanation entfernt. Zu passender Zeit wurde später mit $V_2$ genau ebenso verfahren.

Die Volumina $V_1$ und $V_2$ wurden vor dem Einbringen der Emanation bestimmt; die Unsicherheit wegen des Abschmelzens bei $B$ (Fig. 1) war sicher kleiner als $^1/_{300}$ des Volumens des kleinen Gefäßes.

Die Empfindlichkeit des benutzten Elektroskops war eine solche, daß die Emanation von $10^{-8}$ g $Ra$ im Gleichgewicht 8 Sk.-T./Minute lieferte; zur Messung gelangten Beträge, die 1,5 bis 4 mal so groß waren.

Die Resultate sind in obiger Tabelle enthalten.

Die Zahlen unter $i_1$ und $i_2$ sind Mittel von je vier Beobachtungen mit einem mittleren Fehler von 0,5 Proz. der einzelnen Ablesung.

Das Mittel aller Versuche steht in guter Übereinstimmung mit dem von Rutherford und Soddy erhaltenen Wert von 3,77 Tagen. Die Bemerkung dürfte von Interesse sein, daß Herr Dr. Bronson im hiesigen Institut kürzlich zwei Abklingungskurven der $Ra$-Emanation aufgenommen hat, die zu den Werten $T = 3{,}73$ und $T = 3{,}72$ Tagen geführt haben. Die von ihm benutzte elektrometrische Methode (steady deflection method) ist von der eingangs erwähnten Fehlerquelle vollkommen frei. Es darf daher wohl als sicher gelten, daß die Periode der Radiumemanation kleiner als 3,80 Tage ist, und als sehr wahrscheinlich, daß sie in der Nähe von 3,75 Tagen liegt.

Herrn Professor Rutherford danke ich herzlichst für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für sein stetes Interesse und für wertvolle Ratschläge während ihrer Ausführung.

Montreal, Canada, Macdonald Physics Building Mc Gill University, Mai 1907.

(Eingegangen 7. Oktober 1907.)

## Über den Wechselstromwiderstand der Spulen.

Von A. Sommerfeld.

In dieser[1]) und mehreren anderen[2]) Zeitschriften hat Herr A. Battelli eine Theorie des Spulenwiderstandes bei hoher Wechselzahl veröffentlicht, der ich gezwungen bin entgegenzutreten. Ich bedaure dies um so mehr, als die Herren Battelli und Magri[3]) um die erstmalige Feststellung der starken Zunahme des Spulenwiderstandes mit der Frequenz und ihre Erklärung durch einseitigen Skineffekt wesentliches Verdienst haben.

Da die Theorie des Herrn Battelli auf einer Reihe schwer kontrollierbarer Annahmen beruht, werde ich mich nur mit seiner Schlußformel beschäftigen, welche eine qualitativ andere Abhängigkeit von der Wechselzahl zeigt, wie die früher von mir[4]) abgeleitete Formel. Ich werde zu zeigen haben, daß die scheinbare Übereinstimmung zwischen der Widerstandsformel und den Messungen Battellis auf der irrtümlichen Berechnung[5]) des Rayleighschen

1) Diese Zeitschr. **8**. Jahrg. 1907, I. Teil 296, II. Teil 530, III. Teil 533.

2) Journal de Physique (4) **6**, 559, 1907; Nuovo Cimento (5) **11**, 351, 1906; Accademia dei Lincei, Rendiconti **15**, 1906, 1. sem., S. 148, 471, 529, 2. sem. S. 255.

3) Phil. Mag (6) **5**, 1, 1903.

4) Ann. d. Phys. **15**, 673, 1904.

5) Bereits in meiner früheren oben zitierten Arbeit S. 692 hatte ich kurz darauf hingewiesen, daß die Herren Battelli und Magri in ihrer Abhandlung im Phil. Mag. den Widerstand des geraden Drahtes unrichtig berechnet haben. Es ist genau derselbe Fehler, auf den ich jetzt ausführlicher zurückkommen muß.

Widerstandes eines geraden Drahtes beruht, mit dem der Widerstand des solenoidal aufgewickelten Drahtes verglichen wird. Ferner werde ich auf die Einwände Battellis gegen meine frühere Arbeit in Kürze zurückkommen und nachweisen, daß die Resultate der letzteren auch bei einer verschärften Behandlung des Problems bestehen bleiben.

1. Der allgemeine, für beliebige Schwingungszahlen gültige Wert des Widerstandes $w$ eines geraden Drahtes, geteilt durch den Gleichstromwiderstand $w_0$ desselben Drahtes, lautet bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{w}{w_0} &= \mathfrak{Re}\left\{-\frac{x}{2}\frac{\mathcal{J}(x)}{\mathcal{J}'(x)}\right\}, \\ \frac{x}{2} &= (1-i)\varkappa, \quad \varkappa = r\sqrt{\frac{\pi\mu\sigma n}{2}} \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

wo $\mathcal{J}$ die Besselsche Funktion nullter Ordnung, $\mathcal{J}'$ ihren Differentialquotienten, $r$ den Drahtradius, $\mu$ die Permeabilität des Materials, $\sigma$ seine Leitfähigkeit (in gewöhnlicher Weise elektromagnetisch gemessen) und $n$ die Schwingungszahl in $2\pi$-Zeiteinheiten bedeutet. Für hinreichend schnelle (Hertzsche) Schwingungen ergibt sich hieraus, da $\mathcal{J}/\mathcal{J}' = -i$ wird, einfach:

$$\frac{w}{w_0} = \varkappa. \qquad (2)$$

Dies ist die bekannte Grenzformel von Lord Rayleigh. Für Kondensatorentladungen, wie sie Herr Battelli benutzt, genügt sie aber nicht. Hier muß man für $\mathcal{J}$ die semikonvergenten Entwickelungen benutzen und erhält[1]):

$$\frac{w}{w_0} = \varkappa + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\frac{1}{\varkappa} + \cdots\cdots \qquad (3)$$

Bei den von Herrn Battelli zitierten Messungen ist $\varkappa$ höchstens gleich 2; es ist bei ihrer Berechnung daher unzulässig (3) mit (2) zu vertauschen.

Andererseits habe ich für ein erheblich idealisiertes Solenoid (vgl. später) als allgemein gültige Widerstandsformel gefunden[2]):

$$\frac{w}{w_0} = \frac{\alpha}{2}\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha + \sin\alpha}{\mathfrak{Cos}\,\alpha - \cos\alpha}, \quad \alpha = 4\varkappa\sqrt{\pi}, \qquad (4)$$

bei gleicher Bedeutung von $\varkappa$ wie in (1). Für einigermaßen schnelle Schwingungen läßt sich diese Formel noch vereinfachen. Dem Werte $\varkappa = 2$ z. B. entspricht $\alpha = 14$; für diese Größenordnung von $\alpha$ kann man aber (4) sicher ersetzen durch

$$\frac{w}{w_0} = \frac{\alpha}{2} = 2\varkappa\sqrt{\pi}. \qquad (5)$$

Dagegen lautet die entsprechende Formel des Herrn Battelli[1]) in den hier angewandten Bezeichnungen:

$$\frac{w}{w_0} = 2\sqrt{2}\,\sigma^2\pi^2 r\beta\left(\frac{\mu n}{2\pi\sigma}\right)^{3/4}; \qquad (6)$$

hier ist $\beta$ eine Größe, von welcher Herr Battelli annimmt, daß sie nur von den Abmessungen des Drahtes, nicht von der Schwingungszahl abhängt.

Bezeichnen wir das Verhältnis $w/w_0$ bei der Spule mit $R$, dasjenige beim geraden Drahte mit $R'$, so gibt $R/R'$ das Verhältnis des Spulenwiderstandes zu demjenigen des geraden Drahtes bei gleicher Drahtlänge und gleicher Wechselzahl.

Herr Battelli glaubt, daß für die von ihm benutzten Schwingungszahlen meine Theorie für $R/R'$ den konstanten Wert $2\sqrt{\pi}$ ergibt, indem er mit meiner Formel (5) den unzureichenden Näherungswert (2) der Rayleighschen Grenzformel kombiniert. In Wirklichkeit ergibt sich aus meiner Formel (5) und der richtigen Näherungsformel (3) ein mit der Schwingungszahl wachsender Wert von $R/R'$, ebenso wie aus den Messungen Battellis. Der konstante Wert $2\sqrt{\pi}$ würde erst bei viel höheren Wechselzahlen erreicht werden.

Andererseits glaubt Herr Battelli aus seiner Formel (6) auf den folgenden Wert[2]) eben jenes Verhältnisses schließen zu müssen:

$$\frac{R}{R'} = 2\sqrt{2}\,\sigma\pi\beta\sqrt[4]{\frac{\mu n}{2\pi\sigma}}, \qquad (7)$$

so daß $R/R'$ mit der Schwingungszahl wie $\sqrt[4]{n}$ wachsen würde. Bei der Ableitung von (7) ist aber wieder der unzureichende Näherungswert (2) des Rayleighschen Widerstandes benutzt worden. In Wirklichkeit ergibt sich für den in Rede stehenden Schwingungsbereich aus der Battellischen Formel (6) und dem richtig gerechneten Widerstand des geraden Drahtes ein stärkeres Anwachsen als $\sqrt[4]{n}$ und auch ein stärkeres Anwachsen, als es die eigenen Beobachtungen Battellis zeigen. Die Formel (7) würde, wenn man einmal (6) zugeben wollte, erst bei viel höheren Schwingungszahlen Platz greifen.

2. Die allgemeinen Bemerkungen der vorigen Nummer will ich durch die von Herrn Battelli in dieser Zeitschrift[3]) herangezogene Messungsreihe belegen, obwohl ich die Battellische

1) Noch bequemer verwendet man die Tabellen oder Figuren von Zenneck, Elektromagn. Schwingungen, S. 993.

2) Siehe Gleichung (9) und (18) meiner oben zitierten Arbeit.

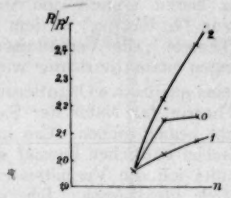
1) Diese Zeitschr. l. c. III. Teil, S. 536; ich habe zwei Druckfehler in der Battellischen Formel verbessert und dieselbe mit $w_0 = l/\sigma\pi r^2$ dividiert ($l$ = Drahtlänge).

2) Diese Zeitschr. l. c. S. 536, Gleichung (9). Hier fehlt übrigens der Faktor $\sigma$, weil die Rayleighsche Grenzformel in Gleichung (8) ebenda nicht ganz richtig wiedergegeben ist.

3) Diese Zeitschr. l. c., S. 536, oder Phil. Mag. l. c., S. 28 oder Memorie della R. Ac. di Torino **51**, 374.

Berechnung eben dieser Reihe schon in meiner früheren Arbeit[1]) richtig gestellt habe. Ich bemerke übrigens, daß auch neuere Messungen[2]) Battellis, die ich ebenfalls zum Teil durchgerechnet habe, zu demselben Ergebnis führen: Sie bestätigen die Battellische Theorie nur dann, wenn man, wie es in (7) geschehen, den unzureichenden Wert (2) des Rayleighschen Widerstandes einsetzt.

Die Perioden $T$ der Schwingung sind in der ersten Spalte der folgenden Tabelle angegeben; unsere Schwingungszahl $n$ ist dann gleich $2\pi/T$.




unter Berichtigung des mehrfach genannten Irrtums die Meßwerte proportional sein sollen. Die von Herrn Battelli erhaltenen Meßwerte selbst sind in der letzten Spalte angegeben.

| Periode $T$ | $\varkappa$ nach (1) | $R'$ nach (3) | $R/R'$ nach (5) u. (3) | $\sqrt[4]{n}$ | $\sqrt[4]{n}\,\frac{\varkappa}{R'}$ proportional mit $R/R'$ nach (6) u. (3) | $R/R'$ gemessen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $4{,}3 \cdot 10^{-6}$ | 1,43 | 1,72 | 2,04 | 34,8 | 29,0 | 1,96 |
| $3{,}0 \cdot 10^{-6}$ | 1,73 | 2,02 | 3,04 | 38,1 | 32,6 | 2,15 |
| $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ | 2,00 | 2,28 | 3,12 | 41,0 | 36,0 | 2,17 |

Der Drahtradius war $r = 0{,}39$ mm; für $\sigma$ habe ich $5{,}9 \cdot 10^{-4}$ eingesetzt. Mit diesen Daten und $\mu = 1$ sind die Werte von $\varkappa$ in der zweiten Spalte der Tabelle nach Gleichung (1) berechnet. Es sind dies zugleich diejenigen Werte, die Herr Battelli irrtümlicherweise als Rayleighsches Widerstandsverhältnis $R' = w/w_0$ benutzt. Die richtigen Werte von $R'$, die wegen der Kleinheit von $\varkappa$ wesentlich von $\varkappa$ nach oben abweichen, sind in der dritten Spalte nach Gleichung (3) berechnet. Die vierte Spalte enthält $R/R'$ als Quotient aus dem Werte der Gleichung (5) und demjenigen der vorigen Spalte. Nach meiner früheren Arbeit ist diesem Quotienten noch ein Erfahrungskoeffizient[3]) hinzuzufügen, so daß die Werte unserer vierten Spalte den Meßwerten nicht gleich, sondern proportional sein sollen. In der fünften Spalte ist $\sqrt[4]{n}$ dargestellt, d. h. der bei der fraglichen Meßreihe veränderliche Faktor der Gleichung (7); wir wiesen aber bereits darauf hin, daß (7) aus (6) nur folgt, wenn man fälschlich $R' = \varkappa$ nimmt; derjenige Wert von $R/R'$, der rechtmäßig aus der Battellischen Formel (6) entsteht, ergibt sich aus (7) durch Multiplikation mit $\varkappa/R'$, wobei $R'$ aus Gleichung (3) zu berechnen ist. Wir geben daher in der sechsten Spalte die Größe $\sqrt[4]{n}\,\frac{\varkappa}{R'}$, welcher nach der Battellischen Theorie

Die Abweichung der einen und anderen Theorie von den Meßwerten ist durch die Figur zum Ausdruck gebracht. Hier bezeichnet $o$ die Kurve der Meßwerte von $R/R'$. Die Kurve 1 entspricht meiner Theorie und folgt aus den Zahlen der Spalte 4, nachdem wir durch einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor die erste derselben dem ersten Meßwerte gleich gemacht haben. Ebenso entspricht die Kurve 2 der Battellischen Theorie, d. h. sie stellt die Zahlen der Spalte 6 bei entsprechender Wahl des Proportionalitätsfaktors dar. Wie man sieht, weicht die Battellische Kurve 2 von den Beobachtungen ebensosehr nach oben hin ab, wie meine Kurve nach unten.

Ob die Abweichungen zwischen den Battellischen Messungen und meiner Theorie den ersteren zur Last fallen oder ob sie ihren Grund darin haben, daß meine Theorie auch in ihrer verschärften Form (s. u.) von den Verschiebungsströmen in der umgebenden Luft und damit von der Kapazität der Spule absieht, läßt sich an Hand des vorliegenden Erfahrungsmaterials noch nicht sicher beurteilen.

3. Schließlich muß ich noch auf die Einwände[1]) antworten, die Herr Battelli gegen meine Theorie erhebt und die er zu dem Urteil zusammenfaßt, daß meine Theorie sich „weder für niedrige noch für hohe Wechselzahlen auf wirkliche Solenoide anwenden läßt".

1) Ann. d. Phys. 15, 673, 1904.
2) Acc. dei Lincei 15, 2. sem., S. 261.
3) Ich benutze hier die von Herrn Battelli bevorzugte zweite Einführung des Erfahrungskoeffizienten $\gamma'$ in meiner Annalenarbeit S. 693 unten.

1) Die Einwände Battellis gegen die M. Wiensche Theorie, vgl. besonders Acc. dei Lincei l. c. 1. sem. S. 149, kann ich ebenso wenig gelten lassen; sie ließen sich mit demselben Recht gegen alle Anwendungen der Methode der kleinen Schwingungen erheben.

Im Gegensatz hierzu kommt eine Straßburger Dissertation von Th. Black[1]) zu dem Ergebnis, daß meine Theorie „die Verhältnisse in fast allen Beziehungen qualitativ richtig wiedergibt".

Mehr als eine qualitative Orientierung konnte aber meine Theorie der Natur der Sache nach zu liefern nicht beanspruchen. Um nämlich zu einer so einfachen endlichen Formel wie (4) zu gelangen, mußte ich die Verhältnisse bei der Spule erheblich idealisieren. Ich sah nicht nur von der endlichen Länge, sondern auch von der Ganghöhe und der besonderen Querschnittsform ab, indem ich die Spule durch einen metallischen Hohlzylinder ersetzte, dessen Dicke ich so bestimmte, daß ihr Quadrat dem kreisförmigen Querschnitt des Spulendrahtes flächengleich wurde. Den Vergleich des quadratischen mit dem kreisförmigen Querschnitt und die anschließende Einführung eines Erfahrungskoeffizienten $\gamma$ habe ich mit aller Vorsicht vorgetragen.[2])

Es ist nun offenbar ein Mißverständnis, wenn Herr Battelli meint, meine Theorie behaupte die Unabhängigkeit des Widerstandes von der Ganghöhe der Spule. Über diese Abhängigkeit sagt meine Theorie ebensowenig etwas aus, wie über die Abhängigkeit von der Länge der Spule, da beide Größen aus dem Ansatz des Problems eliminiert sind. Vielmehr behauptet meine Theorie lediglich, daß bei gleicher Ganghöhe und Spulendicke die Abhängigkeit von der Schwingungfrequenz eben durch die von mir entwickelten Formeln bis auf einen von der Frequenz unabhängigen (oder genauer gesagt, mit ihr langsam veränderlichen) Koeffizienten $\gamma$ dargestellt wird. Daß dieser Koeffizient von der Ganghöhe abhängen könne, läßt meine Theorie durchaus offen.[3]) Des Näheren zeigen die Versuche von Black, sowie eine strenge Untersuchung[4]), die ich inzwischen durchgeführt habe, daß er eine Funktion nur des Verhältnisses Drahtradius : Ganghöhe ist.

Andererseits behauptet meine Theorie die Unabhängigkeit des Widerstandes von dem Durchmesser der Spule. Diese wird durch die Messungen von Black voll bestätigt und liegt auch meiner neueren Behandlung des Problems zugrunde.

Nur in einem Punkte kann ich der Kritik[1]) des Herrn Battelli beipflichten, daß nämlich die beiläufige, an Fig. 4 meiner ursprünglichen Arbeit anschließende Bemerkung nicht bindend sei, durch die ich plausibel zu machen suchte, daß der fragliche Koeffizient $\gamma < 1$ sei.

Was nun die Hauptsache betrifft, nämlich die Abhängigkeit des Spulenwiderstandes von der Schwingungsfrequenz bei großen Werten der letzteren, so kann ich meine frühere Formel (5) auf Grund der schon zitierten strengen Untersuchung vollständig aufrecht halten (wobei natürlich der Zahlenfaktor $2\sqrt{\pi}$ im Sinne meiner früheren Arbeit durch einen kleineren, überdies von dem Verhältnis Drahtradius : Ganghöhe abhängigen Koeffizienten zu ersetzen ist). Diese Untersuchung knüpft an eine dankenswerte Vorarbeit von Herrn G. Picciati[2]), insbesondere an die von diesem für kreisförmigen Querschnitt und sehr hohe Frequenzen entwickelte Widerstandsformel an:

$$\frac{w}{w_0} = \varkappa\left(1 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty c_\mu \bar{c}_\mu\right), \qquad (8)$$

mit der in (1) angegebenen Bedeutung von $\varkappa$. Dieselbe unterscheidet sich von meiner ursprünglichen Formel (5) nur dadurch, daß der Faktor $2\sqrt{\pi}$ ersetzt ist durch $1 + \frac{1}{2}\sum c_\mu \bar{c}_\mu$. Während aber die Koeffizienten $c_\mu$ (und die dazu konjugierten Größen $\bar{c}_\mu$) bei Herrn Picciati wegen nicht vollständiger Berücksichtigung der Grenzbedingungen unbestimmt bleiben, habe ich die vollständigen Gleichungen zu ihrer Berechnung entwickelt. Aus ihnen ergibt sich, daß die $c$ in dem Falle von Picciati (unendlich dicht aneinanderliegende Windungen) für $n = \infty$ bestimmte endliche Zahlen, in dem allgemeineren Falle beliebiger Ganghöhe bestimmte Funktionen des Verhältnisses Drahtradius : Ganghöhe sind. Mit Rücksicht hierauf sagt die Picciatische Gleichung (8) dasselbe aus, wie meine ursprüngliche Gleichung (5), daß nämlich die Abhängigkeit von der Schwingungszahl genau durch die Größe $\varkappa$, d. h. durch $\sqrt[2]{n}$ bestimmt wird, und daß für sehr große Schwingungszahlen (die aber oberhalb der Battellischen Meßwerte liegen) das Verhältnis Spulenwiderstand : Widerstand des geraden Drahtes sich einem konstanten Grenzwerte nähert.

Die strenge Theorie bestätigt also vollkommen meine früheren Ergebnisse,

1) Straßburg 1905 und Ann. d. Phys. **19**, 157, 1906.

2) Vgl. l. c. S. 692. Die Bemerkungen Battellis über eine angebliche Diskontinuität in diesem Koeffizienten sind rein formaler Art und erledigen sich sofort, wenn man die erste Art meiner Einführung dieses Koeffizienten beachtet. Übrigens rechtfertigt die strenge Theorie (s. u. Anm. 4)) auch in dieser Hinsicht qualitativ meine früheren Angaben.

3) Wenn ich in meiner früheren Arbeit Spulen verschiedener Ganghöhe zur Berechnung jenes Koeffizienten herangezogen habe (l. c. S. 693), so geschah dieses lediglich, um eine Übersicht über seine ungefähre Größe zu gewinnen.

4) Erscheint in den Ann. d. Phys. Als vereinfachende Voraussetzungen werden hierbei lediglich zugelassen: 1. daß die Verschiebungsströme vernachlässigt werden dürfen, 2. daß der Spulendurchmesser belanglos ist (s. o.) und daher als unendlich angenommen werden darf, 3. daß es auf die Länge der Spule nicht ankommt.

1) Acc. dei Lincei l. c. 1. sem. S. 153.

2) Nuovo Cimento (5) 11. 1906, Gleichung (25).

während sie der Battellischen Widerstandsformel wesentlich widerspricht.

(Eingegangen 5. September 1907.)

---

**Mitteilungen aus dem physikalischen Institut der Universität Pisa.** (Direktor: A. Battelli.)

**No. 36**[1]: **A. Battelli, Theoretische und experimentelle Untersuchungen über den elektrischen Leitungswiderstand der Solenoide für Ströme hoher Frequenz. (IV. Teil.)**[2]

Um die Formel (9)[3] hinsichtlich der Abhängigkeit von $T$ experimentell zu bestätigen, habe ich schleunigst weitere Messungen ähnlicher Art mit Solenoiden aus Kupferdraht zu Ende geführt. Jedes dieser Solenoide wurde in ein besonderes Kalorimeter gebracht, welches aus einem unten geschlossenen Glaszylinder gebildet wurde, der sich nach oben hin in einem gläsernen Kapillarröhrchen fortsetzte. An die beiden Enden des Solenoids wurden zwei Platinelektroden von ungefähr 1 cm Länge mit Silberlot angelötet. Diese Platinelektroden wurden ihrerseits in den Glaszylinder eingeschmolzen. Das Kapillarröhrchen wurde oben zu einem Heber umgebogen, und sein freies Ende konnte in ein Becherglas $A$ eingetaucht werden. Das Zylindergefäß des Kalorimeters wurde in einem der üblichen doppelwandigen und versilberten Vakuumisoliergefäße senkrecht gehalten. Die Versilberung fehlte auf zwei ganz feinen Längsstreifen, welche zwei Fenster zur unmittelbaren Beobachtung des Innern bildeten. Im vorliegenden Falle boten diese Fenster noch den Vorteil, das Auftreten von Foucaultströmen in der Versilberungsschicht zu verhindern. Die Verbindung mit dem Außenraum wurde an der oberen Elektrode mittels eines kurzen und biegsamen metallischen Hohlstückes und an der unteren Elektrode mittels etwas Quecksilbers bewerkstelligt. In dieses Quecksilber tauchte ferner ein senkrechtes Kupferblech, wie dies in Fig. 1 angegeben ist.

Die Luftzirkulation zwischen dem Innenraum des Vakuumisoliergefäßes und der Umgebung wurde durch einige Wattepfropfen verhindert, welche die Öffnung dieses Isoliergefäßes verschlossen. Auf diese Weise war der Schutz gegen die Umgebung viel besser als er unter gleichen Verhältnissen bei den früher von mir in Gemeinschaft mit Magri in der angeführten Arbeit benutzten Apparaten gewesen war.

Außer diesen Kalorimetern mit Solenoiden gelangten noch zwei weitere zur Verwendung, die in der gleichen Weise hergestellt waren

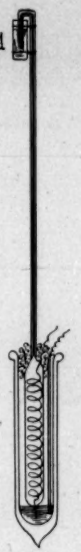



Fig. 1.

und anstatt des Solenoids einen von einem Ende des Kalorimeterrohres zum andern geradlinig ausgespannten Draht von einem Meter Länge enthielten.

Diese letztgenannten Kalorimeter wurden gleichfalls durch ein langes Vakuumisoliergefäß gegen die Umgebung geschützt.

Die Abmessungen der verschiedenen Kalorimeter waren die folgenden:

Kalorimeter mit Solenoiden:

| | Solenoid 1 | Solenoid 2 | Solenoid 3 | Solenoid 4 |
|---|---|---|---|---|
| Dicke des Drahtes in cm | 0,078 | 0,078 | 0,097 | 0,097 |
| Äußerer Durchmesser der Windungen in cm . . | 1,52 | 1,52 | 1,72 | 1,72 |
| Gesamtzahl d. Windungen | 188 | 104 | 163 | 91 |
| Länge des Solenoids in cm | 24,5 | 25,0 | 24,5 | 24,5 |

Kalorimeter mit geradlinig ausgespannten Drähten:

| | Kalorimeter I | Kalorimeter II |
|---|---|---|
| Dicke des Drahtes in cm . . | 0,078 | 0,097 |
| Gesamtlänge d. Drahtes in cm | 105 | 105 |

Einige Stunden vor Beginn der Versuche senkte ich das Becherglas $A$ und trieb durch Erwärmen des zylindrischen Kalorimetergefäßes mit der Hand eine gewisse Menge Toluol aus

1) Nr. 35: diese Zeitschr. **8**, 533, 1907.
2) I. Teil: diese Zeitschr. **8**, 296, 1907; II. Teil: diese Zeitschr. **8**, 530, 1907; III. Teil: diese Zeitschr. **8**, 533, 1907.
3) Diese Zeitschr. **8**, 536, 1907.

dem Ende des Kapillarröhrchens aus; dann wartete ich, bis die Flüssigkeitskuppe in der Kapillaren bis fast auf den Grund der Röhre gesunken war, und darauf begann ich mit den Versuchen.

Die allgemeine Anordnung der Apparate ist in Fig. 2 schematisch dargestellt.

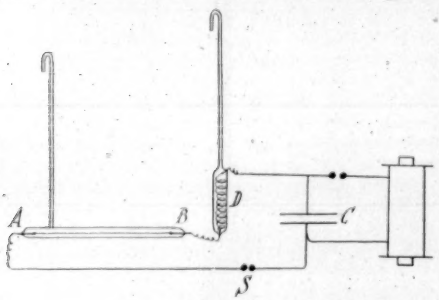



Fig. 2.

Ein Kalorimeter mit geradlinig ausgespanntem Draht $AB$ und ein Kalorimeter mit einem aus Draht von derselben Dicke hergestellten Solenoid $D$ wurden in Reihe geschaltet und bildeten den Entladungsstromkreis eines Kondensators $C$. Durch diesen Stromkreis ließ ich nacheinander einige Entladungen gehen. Die Anzahl dieser Entladungen wurde von Fall zu Fall derart verändert, daß ich in den beiden Kapillarröhrchen Verschiebungen der Flüssigkeitskuppe von einigen Millimetern erhielt. Die Stellung der Kuppe wurde aus der Ferne mit einem Fernrohr an einer an dem Rohre angebrachten Millimeterteilung abgelesen. Die Ablesungen erfolgten in gleichen Zwischenräumen, von Minute zu Minute. Die Bildung der Entladung ließ ich zwischen zwei aufeinander folgenden Ablesungen eintreten; sie dauerte im allgemeinen 30 Sekunden. Den Wärmeaustausch zwischen den Kalorimetern und dem Vakuumisoliergefäß berücksichtigte ich dadurch, daß ich von der in jeder Minute eintretenden Verschiebung das Mittel aus den beiden Verschiebungen (algebraisch) subtrahierte, die in der voraufgegangenen und in der folgenden Minute eintraten.

In dieser Weise habe ich viele Messungen ausgeführt; dabei habe ich durch Änderung der in den Entladungskreis eingeschalteten elektrischen Kapazität die Schwingungsperiode der Entladungen verändert. Zu diesem Zwecke standen mir die folgenden Kondensatoren zur Verfügung, die ich nacheinander an die in Fig. 2 mit $C$ bezeichnete Stelle setzte:

1. Ein Kondensator aus 34 Glasplatten mit Stanniolbelegung mit einer Kapazität von ungefähr 0,06 Mikrofarad;

2. Zwei Luftkondensatoren mit einer Kapazität von 0,007976 bzw. 0,007885 Mikrofarad; sie wurden bald in Parallelschaltung, bald in Kaskadenschaltung verwendet;

3. Ein Kondensator, der aus einer einzigen Glasplatte von gleichen Abmessungen wie die im Kondensator Nr. 1 verwendeten bestand.

Ich konnte auf diese Weise für jedes einzelne Solenoid die Schwingungsperiode ungefähr im Verhältnis 1 zu 6 ändern und im ganzen vier verschiedene Perioden erhalten.

In der zum Schluß angegebenen Tabelle habe ich die Versuchsergebnisse zusammengefaßt. Die dort in der dritten und vierten Spalte angegebenen Zahlen sind die Mittelwerte aus zahlreichen Bestimmungen, die untereinander bis auf innerhalb 3 v. H. übereinstimmen.

Die Wärmemengen sind in einer willkürlichen Einheit gemessen. Diese Einheit entspricht der Wärmemenge, welche in einem jeden Kalorimeter durch einen Gleichstrom von $^1/_2$ Ampere entwickelt wird, welcher 30 Sekunden lang durch den Stromkreis fließt. Dadurch gehen, wenn man den Quotienten aus den Zahlen dieser beiden Spalten bildet, die Längen der Drähte nicht mit in die Rechnung ein, welche in dem Kalorimeter mit Solenoid und in dem mit geradlinig ausgespanntem Draht angebracht sind.

Dieser Quotient ist in der fünften Spalte verzeichnet. Er gibt ohne weiteres das Verhältnis zwischen dem Widerstande $R$ des betreffenden Solenoids und dem Widerstande an, den der dieses Solenoid bildende Draht haben würde, wenn er geradlinig ausgespannt wäre.

Die Schwingungsperiode $T$ wurde in dem Falle, wo der Entladungsstromkreis aus dem Solenoid 1 und dem geradlinig ausgespannten Drahte I bestand, unmittelbar in der Weise gemessen, daß die Funken nach der Methode des rotierenden Spiegels photographiert wurden. Das geschah für jeden der vier in den Entladungskreis eingeschalteten Kondensatoren.

Aus den gegenseitigen Verhältnissen der vier Perioden für diesen Fall wurde der Wert der Verhältnisse der entsprechenden vier Perioden für die Fälle abgeleitet, in denen die Bestimmungen in der Weise wiederholt wurden, daß nur die in den Stromkreis eingeschalteten Kalorimeter gewechselt wurden.

Die Kenntnis dieser Verhältnisse konnte in meinem Falle die Kenntnis der absoluten Werte dieser Periode ersetzen, weil es für mich genügte, die in der letzten Spalte verzeichneten Ausdrücke bis auf einen Proportionalitätsfaktor zu bestimmen. Ich habe mich somit bei der Bestätigung meiner theoretischen Ergebnisse nur damit abgegeben, die Konstanz des Aus-

drucks $\frac{R}{R'}\sqrt[4]{T}$ zu bestätigen, und nicht damit, den absoluten Wert dieses Ausdrucks zu ermitteln. Aus diesem Grunde sind in der zweiten Spalte die Perioden bis auf konstante Faktoren $K, K', K'', \ldots$ angegeben.

| Verglichene Widerstände | Schwingungsperiode der Entladungen | n dem Solenoid entwickelte Wärmemenge | In dem geradlinig ausgespannten Drahte entwickelte Wärmemenge | $\frac{R}{R'}$ | $\frac{R}{R'}\sqrt[4]{T}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 und I | $8{,}2 \cdot 10^{-6}$ | 2,01 | 1,27 | 1,58 | $2{,}67 \cdot 10^{-3/2}$ |
| | $4{,}5 \cdot 10^{-6}$ | 2,04 | 1,15 | 1,77 | $2{,}59 \cdot 10^{-3/2}$ |
| | $2{,}3 \cdot 10^{-6}$ | 2,09 | 1,03 | 2,00 | $2{,}50 \cdot 10^{-3/2}$ |
| | $1{,}4 \cdot 10^{-6}$ | 2,76 | 1,20 | 2,30 | $2{,}51 \cdot 10^{-3/2}$ |
| 2 und I | $8{,}2 \cdot K$ | 1,56 | 1,30 | 1,20 | $2{,}03 \cdot \sqrt[4]{K}$ |
| | $4{,}5 \cdot K$ | 1,43 | 1,10 | 1,30 | $1{,}89 \cdot \sqrt[4]{K}$ |
| | $2{,}3 \cdot K$ | 1,89 | 1,22 | 1,55 | $1{,}91 \cdot \sqrt[4]{K}$ |
| | $1{,}4 \cdot K$ | 1,57 | 0,94 | 1,67 | $1{,}82 \cdot \sqrt[4]{K}$ |
| 3 und II | $8{,}2 \cdot K'$ | 2,20 | 1,43 | 1,54 | $2{,}60 \sqrt[4]{K'}$ |
| | $4{,}5 \cdot K'$ | 1,70 | 0,97 | 1,75 | $2{,}55 \cdot \sqrt[4]{K'}$ |
| | $2{,}3 \cdot K'$ | 1,91 | 0,95 | 2,01 | $2{,}47 \cdot \sqrt[4]{K'}$ |
| | $1{,}4 \cdot K'$ | 2,68 | 1,14 | 2,35 | $2{,}56 \cdot \sqrt[4]{K'}$ |
| 4 und II | $8{,}2 \cdot K''$ | 1,27 | 1,08 | 1,18 | $2{,}00 \cdot \sqrt[4]{K''}$ |
| | $4{,}5 \cdot K''$ | 1,25 | 0,94 | 1,33 | $1{,}94 \cdot \sqrt[4]{K''}$ |
| | $2{,}3 \cdot K''$ | 1,73 | 1,18 | 1,47 | $1{,}69 \cdot \sqrt[4]{K''}$ |
| | $1{,}4 \cdot K''$ | 1,67 | 0,98 | 1,71 | $1{,}86 \cdot \sqrt[4]{K''}$ |

Betrachtet man die Zahlen in der letzten Spalte, so sieht man, daß die Proportionalität zwischen dem Verhältnis $\frac{R}{R'}$ und der vierten Wurzel aus der Frequenz mit einer Annäherung als bestätigt angesehen werden kann, die der nahe kommt, welche man bei derartigen experimentellen Messungen verlangen darf.

Wahrscheinlich wird durch die Dämpfung der Schwingungen die Erscheinung beträchtlich kompliziert und eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment verhindert.

(Aus dem Italienischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 7. September 1907.)

## Über die Kraft, welche erforderlich ist, um eine in Bewegung befindliche elektrisierte Kugel aufzuhalten.

Von G. F. C. Searle.[1])

### §. 1. Energie einer in stetiger Bewegung begriffenen geladenen Kugel.

Wenn die Geschwindigkeit eines Systems elektrischer Ladungen auf irgendeine Weise verändert wird, so schreiten von dem System aus Störungswellen nach allen Richtungen hin mit der Geschwindigkeit $v$, der Lichtgeschwindigkeit, fort, und diese Wellen führen Energie und Bewegungsgröße[2]) zu den entlegenen Teilen des elektromagnetischen Feldes. Oliver Heaviside hat zuerst[3]) bemerkt, daß man aus diesen Wellen wichtige Aufschlüsse über die Energie und die Bewegungsgröße des bewegten Systems erhalten könnte. Wenn nun eine geladene Kugel in stetiger Bewegung begriffen ist, so besitzt das elektromagnetische Feld eine elektrische Energie $U$, eine magnetische Energie $T$ und eine Bewegungsgröße $M$. Wenn nun die Kugel plötzlich zur Ruhe gebracht wird, so leisten die Kräfte, welche sie in Ruhe halten, keine Arbeit, weil ihre Angriffspunkte sich nicht bewegen; daher ist die gesamte Energie im Felde, nachdem die Kugel zur Ruhe gebracht ist, dieselbe wie vorher. Wenn die Kugel aufgehalten wird, so schreitet ein Impuls von einer Tiefe gleich dem Durchmesser der Kugel nach außen hin fort. Die elektrische und die magnetische Kraft in diesem Impuls ändern sich schließlich umgekehrt wie die Entfernung, und die Energie und die Bewegungsgröße in dem Impuls streben infolgedessen konstanten Endwerten zu, wenn der Impuls in die Unendlichkeit fortschreitet. Außerhalb des Impulses sind die elektrische und die magnetische Kraft dieselben, als wenn die Kugel in ihrer stetigen Bewegung verharrt hätte; sie sind daher nach einer unendlichen Zeit umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von dem Punkte, welche der Mittelpunkt der Kugel erreicht haben würde, falls sie ihre Bewegung fortgesetzt hätte. Die Energie und die Bewegungsgröße außerhalb des Impulses verschwinden demnach schließlich. Andererseits ist das Feld innerhalb des von dem Impulse begrenzten kugelförmigen Gebietes dasselbe wie das von der ruhenden Kugel herrührende, und die Energie in diesem Teile

1) Vortrag, gehalten vor der Royal Society am 27. Juni 1907.

2) Die Bewegungsgröße für die Volumeneinheit ist $\left(\frac{\mu K}{4\pi}\right) VEH$, wo $VEH$ das Vektorprodukt der elektrischen und der magnetischen Kraft ist.

3) The Electrician, 29. Nov. 1901, S. 210; s. auch Searle, Phil. Mag., Januar 1907, S. 131.

des Feldes ist daher schließlich $U_s$, die elektrostatische Energie der ruhenden Kugel. Wenn also $W$ der Grenzwert der Energie in dem Impulse ist, so ist die Energie im Felde schließlich $U_s + W$. Bevor aber die Kugel aufgehalten wurde, war die Energie $U + T$. Daraus folgt:

$$U + T = U_s + W. \qquad (1)$$

Heaviside berechnete $W$ für den Impuls, der von einer Kugel mit einer Oberflächenladung herrührt, und fand auf diese Weise $U + T$. Sein Wert für $U + T$ stimmt mit dem überein, den ich zuvor durch direkte Integration der Energie im Felde einer bewegten Kugel unter Erstreckung der Integration über den ganzen Raum gefunden hatte.[1])

Paul Hertz[2]) hat diese Methode auf eine Kugel mit einer gleichförmigen Volumenladung angewandt und hat nachgewiesen, daß die Energie und die Bewegungsgröße der in stetiger Bewegung befindlichen Kugel sechs Fünftel von der Energie und der Bewegungsgröße einer Kugel von demselben Halbmesser mit einer gleichen Oberflächenladung betragen. Er hat auch angegeben, wie sich die Methode auf jedes beliebige System anwenden läßt, und ich habe gezeigt[3]), wie die Rechnung für den Fall eines geladenen Rotationsellipsoids, das sich längs seiner Achse fortbewegt, und für den Fall einer sich in ihrer eigenen Ebene bewegenden geladenen Scheibe im einzelnen durchzuführen ist.

## § 2. Die Kraft, welche erforderlich ist, um eine geladene Kugel in Bewegung zu setzen; Methode von Paul Hertz.

Mit dieser Aufzählung sind indessen die Möglichkeiten, welche die Impulsmethode bietet[4]), keineswegs erschöpft. Hertz hat sie nämlich zur Bestimmung der Kraft angewendet, welche man an einer mit einer Volumladung oder mit einer Oberflächenladung ausgestatteten Kugel angreifen lassen muß, damit die Kugel plötzlich aus der Ruhe in Bewegung übergeht und sich dann gleichförmig längs einer geraden Linie mit irgendeiner Geschwindigkeit $u$ fortbewegt, welche nicht größer ist als die Lichtgeschwindigkeit $v$.

Ist $F$ die erforderliche Kraft, so ist die von $F$ geleistete Arbeit, wenn die Kugel während einer Zeit $t$ in Bewegung gewesen ist,

$$\int_0^t F u\, dt.$$

Bevor die Kugel angefangen hatte sich zu bewegen, war die Energie in dem Felde $U_s$. Nach der Zeit $t$ ist sie

$$U_s + \int_0^t F u\, dt.$$

Wenn zur Zeit $t$ die Kugel plötzlich aufgehalten wird, so leisten die Kräfte, welche sie aufhalten, keine Arbeit, und die Energie im Felde bleibt infolgedessen ungeändert. Nach einer unendlichen Zeit besteht die Energie in dem Felde aus $U_s$ und aus $W'$, der Energie in dem zusammengesetzten Impulse, der aus den beiden Impulsen gebildet wird, die beim Anstoßen und beim Anhalten der Kugel entstehen.

Es ist daher

$$U_s + W' = U_s + \int_0^t F u\, dt,$$

oder

$$F = \frac{1}{u}\frac{dW'}{dt}. \qquad (2)$$

Man muß beachten, daß die beiden Impulse nicht konzentrisch sind, da ihre Mittelpunkte durch die Entfernung $ut$ voneinander getrennt sind. Im Falle einer Kugel mit Oberflächenladung vernichten die Impulse gegenseitig ihre Wirkung, wo sie übereinandergreifen, denn die elektrische und die magnetische Kraft, welche durch das plötzliche Anhalten der Kugel hervorgerufen werden, sind denen, die durch den Anstoß der Kugel entstehen, der Größe nach gleich und der Richtung nach entgegengesetzt und sind auch über die ganze Tiefe eines jeden Impulses konstant. Bei einer Kugel mit Volumenladung sind $E$ und $H$ nicht über die ganze Tiefe eines jeden Impulses konstant, und die Rechnung wird in diesem Falle etwas verwickelter.

Bei dem Vorgang des Anstoßes der Kugel muß man drei Stufen unterscheiden. Wenn $a$ der Halbmesser der Kugel ist, so dauert die erste Stufe von $t = 0$ bis $t = \frac{2a}{(v+u)}$, die zweite von $t = \frac{2a}{(v+u)}$ bis $t = \frac{2a}{(v-u)}$ und die dritte von $t = \frac{2a}{(v-u)}$ an. Bezeichnen $F_1$, $F_2$, $F_3$ die auf diesen drei Stufen erforderlichen Kräfte, und setzt man $k$ für $1 - \frac{u}{v}$ ein, so lauten die Ergebnisse von Hertz folgendermaßen:

Kugel mit gleichförmiger Oberflächenladung $Q$

$$F_1 = \frac{Q^2}{2Ka^2}\left\{\frac{v}{u} - \frac{v^2-u^2}{2u^2}\log\frac{v+u}{v-u}\right\}, \qquad (3)$$

1) Phil. Mag. Okt. 1897.
2) Untersuchungen über unstetige Bewegungen eines Elektrons. Göttingen, Diss. 1904, S. 49; s. auch Searle, Phil. Mag., Januar 1907, S. 132.
3) Phil. Mag., Januar 1907.
4) a. a. O. S. 65.

$$F_2 = \frac{Q^2}{2Ka^2}\left\{\frac{1}{4} + \frac{v}{2u} - \frac{3v^2}{4u^2} + \frac{2av}{u^2t} - \frac{a^2}{u^2t^2} + \frac{v^2-u^2}{2u^2}\log\frac{(v-u)t}{2a}\right\},$$

$$F_3 = 0.$$

Die Kraft ist also auf der ersten Stufe konstant, während sie auf der dritten Stufe null ist.

Wenn $u$ nahezu gleich $v$ wird, so streben die Ausdrücke den folgenden Grenzwerten zu:

$$F_1 = \frac{Q^2}{2Ka^2}, \quad t < \frac{a}{v}$$

und

$$F_2 = \frac{Q^2}{2Ka^2}\left\{\frac{2a}{vt} - \frac{a^2}{v^2t^2}\right\}, \quad t > \frac{a}{v}.$$

Eine dritte Stufe ist nicht vorhanden, denn die zweite Stufe erstreckt sich von $t = \frac{a}{v}$ bis zu unendlich großen Werten für die Zeit.

Kugel mit gleichförmiger Volumenladung $Q$.

$$F_1 = \frac{Q^2u}{8Ka^6v}\left\{16a^3vt - 12a^2v^2t^2 + \left(1 + \frac{3u^2}{5v^2}\right)v^4t^4\right\}, \quad (4)$$

$$F_2 = \frac{Q^2u^2}{8Ka^6v^2}\left\{-\frac{4a^6}{v^2t^2} + \frac{48a^5}{5vt} + (-18k + 9k^2)a^4 + (12k^2 - 8k^3)a^3vt + \left(-3k^3 + \frac{9k^4}{4}\right)a^2v^2t^2 + \left(\frac{3k^5}{40} - \frac{k^6}{16}\right)v^4t^4\right\},$$

$$F_3 = 0.$$

Wenn $u = v$ und demzufolge $k = 0$ wird, so werden die Ausdrücke:

$$F_1 = \frac{Q^2}{8Ka^6}\left(16a^3vt - 12a^2v^2t^2 + \frac{8}{5}v^4t^4\right), \quad t < \frac{a}{v}. \quad (4a)$$

und

$$F_2 = \frac{Q^2}{8Ka^6}\left\{-\frac{4a^6}{v^2t^2} + \frac{48a^5}{5vt}\right), \quad t > \frac{a}{v}.$$

## § 3. Die Kraft, welche erforderlich ist, um ein in Bewegung befindliches System aufzuhalten. Impulsmethode.

Ich finde, daß man durch eine geringere Erweiterung der Hertzschen Arbeit leicht die Kraft berechnen kann, welche erforderlich ist, um ein geladenes System plötzlich aufzuhalten. Der Einfachheit halber soll die Untersuchung auf den Fall beschränkt werden, in welchem sowohl die Bewegungsgröße des in stetiger Bewegung begriffenen Systems als auch die Bewegungsgröße in dem Impuls, der entsteht, wenn das System plötzlich angehalten wird, der Richtung der Bewegung parallel ist. Ist $F$ die Kraft, welche man zu irgendeiner Zeit $t$ an dem System angreifen lassen muß, nachdem dieses zur Zeit $t = 0$ zur Ruhe gebracht worden ist, und ist die positive Richtung von $F$ der von $u$ entgegengesetzt gerichtet, so ist $F$ auch die Kraft, welche das elektromagnetische Feld auf das System in der Richtung von $u$ ausübt.

Die von dem elektromagnetischen Felde von $t = 0$ bis $t = t$ gelieferte Bewegungsgröße ist

$$\int_0^t F dt.$$

Während dieses Zeitraumes leistet die Kraft $F$ keine Arbeit, weil das System in Ruhe ist, und die Energie des Systems bleibt daher während dieses Zeitraumes ungeändert.

Zu der Zeit $t$ möge das System wieder mit derselben Geschwindigkeit $u$ und ohne Richtungsänderung losgelassen werden, und es sei $G$ die Kraft, welche man zu einer beliebigen späteren Zeit in der Richtung von $u$ an dem System angreifen lassen muß, um die Geschwindigkeit $u$ aufrecht zu erhalten. Diese Kraft reicht von $t = t$ bis $t = t'$, wo $t' - t$ durch die Bedingung bestimmt ist, daß in der Zeit $t' - t$ der Impuls, der entsteht, wenn das System von neuem in Bewegung gesetzt wird, vollständig über das System hinweggegangen ist. Wenn $u = v$ wird, so ist die Zeit $t' - t$ unendlich. Während des Zeitraumes $t' - t$ wird die Bewegungsgröße des Systems um

$$\int_t^{t'} G dt$$

vermehrt, und der gesamte Gewinn an Bewegungsgröße ist demnach

$$\int_t^{t'} G dt - \int_0^t F dt.$$

Während des Zeitraumes $t' - t$ ist die Energie des Systems um

$$u\int_t^{t'} G dt$$

vermehrt worden.

Beim Anhalten und beim Wiederanstoßen des Systems entsteht jedesmal ein Impuls, und der so gebildete zusammengesetzte Impuls führt die Energie $W'$ und die Bewegungsgröße $P'$ fort. Bevor das System angehalten wurde, war die Energie des elektromagnetischen Feldes $U + T$ und seine Bewegungsgröße $M$, und unendliche Zeit nach dem Anhalten und Wiederloslassen ist die Energie $U + T + W'$ und die Bewegungsgröße $M + P'$, denn die Energie und die Bewegungsgröße in den außerhalb des zusammengesetzten Impulses gelegenen Teilen des Feldes verschwinden schließlich.

Setzen wir die beiden Ausdrücke für den

Zuwachs an Bewegungsgröße einander gleich, so erhalten wir

$$\int_{t}^{t} G dt - \int_{0}^{t} F dt = P'.$$

In ähnlicher Weise finden wir:

$$u \int_{t}^{\tau} G dt = W'.$$

Daraus folgt:

$$\int_{0}^{t} F dt = \frac{W'}{u} - P', \qquad (5)$$

und wir finden somit, daß die Kraft, welche erforderlich ist, um das System anzuhalten, durch

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{W'}{u} - P'\right) \qquad (6)$$

gegeben ist.

Diese Kraft wird null werden, sobald $\frac{W'}{u} - P'$ konstant wird, und dieser Fall wird eintreten, sobald $t$ so groß ist, daß die beiden vom Anhalten und vom Wiederanstoßen herrührenden Impulse nicht übereinander greifen.

Da das System aus der Lage wieder in die Bewegung gesetzt wird, in der es angehalten wurde, so sind die beiden Impulse konzentrisch, obschon sich ihre Halbmesser um $vt$ voneinander unterscheiden, denn der eine Impuls entsteht zur Zeit $t = 0$ und der andere zur Zeit $t = t$. Der Umstand, daß die Impulse konzentrisch sind, führt ein vereinfachendes Element in die Rechnungen ein.

Die gesamte Bewegungsgröße, welche seitens des elektromagnetischen Feldes während der Zeit abgegeben wird, welche die aufhaltende Kraft andauert, findet man, wenn man $t$ so groß nimmt, daß die beiden Impulse nicht übereinander greifen. In diesem Falle hat jeder einzelne Impuls dieselbe Energie und dieselbe Bewegungsgröße, und daher ist, wenn $W$ und $P$ die Energie und die Bewegungsgröße in jedem der einzelnen Impulse sind, $W' = 2W$ und $P' = 2P$.

Daraus folgt:

$$\mathcal{F} = \int_{0}^{t} F dt = 2\left(\frac{W}{u} - P\right). \qquad (7)$$

## § 4. Die zum Anhalten einer Kugel mit Oberflächenladung erforderliche Kraft.

Wir können nun die im § 3 gewonnenen Ergebnisse anwenden, um die Kraft zu finden, welche erforderlich ist, um eine mit einer gleichförmigen Oberflächenladung $Q$ ausgestattete Kugel vom Halbmesser $a$ anzuhalten. Ist $W_0$ die Energie und $P_0$ die Bewegungsgröße, welche in dem Impuls ausgesandt werden, der entsteht, wenn die Geschwindigkeit $u$ plötzlich vernichtet wird, so haben wir:[1])

$$W_0 = \frac{Q^2}{2Ka}\left\{\frac{v}{u}\log\frac{v+u}{v-u} - 2\right\} \qquad (8)$$

und

$$P_0 = \frac{Q^2}{2Kau}\left\{\left(\frac{3v}{2u} - \frac{u}{2v}\right)\log\frac{v+u}{v-u} - 3\right\}. \qquad (9)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{W_0}{u} - P_0 = \frac{Q^2}{2Kav}\left\{\frac{v}{u} - \frac{v^2-u^2}{2u^2}\log\frac{v+u}{v-u}\right\}. \qquad (10)$$

Wenn die Zeit $t$ kleiner ist als $\frac{2a}{v}$, so werden die beiden Impulse auf eine Tiefe von $2a - vt$ übereinander greifen, und in diesem Teile werden die elektrische und die magnetische Kraft, die von dem einen Impulse herrühren, die von dem anderen herrührenden genau aufheben, denn diese Kräfte sind über die ganze Tiefe jedes der beiden Impulse konstant. Es bleiben zwei Schalen übrig, jede von der Tiefe $vt$, wo die Kräfte sich nicht gegenseitig aufheben. Die gesamte Energie $W'$ und die gesamte Bewegungsgröße $P'$ in dem zusammengesetzten Impulse werden demgemäß durch

$$W' = 2vt\frac{W_0}{2a}$$

und

$$P' = 2vt\frac{P_0}{2a}$$

gegeben.

Wenn also $F_0$ die Kraft ist, die erforderlich ist, um die mit einer Oberflächenladung versehene Kugel aufzuhalten, so haben wir auf Grund der Formel (6):

$$F_0 = \frac{v}{a}\left(\frac{W_0}{u} - P_0\right) = \frac{Q^2}{2Ka^2}\left\{\frac{v}{u} - \frac{v^2-u^2}{2u^2}\log\frac{v+u}{v-u}\right\}. \qquad (11)$$

Die Kraft ist also während der Zeit $\frac{2a}{v}$, während welcher sie wirkt, konstant. Der Impuls $\mathcal{F}_0$ dieser Kraft, oder die Bewegungsgröße, welche das elektromagnetische Feld an das die Kugel anhaltende Agens abgibt, ist $\frac{2aF_0}{v}$. Daraus ergibt sich:

$$\mathcal{F}_0 = \frac{Q^2}{2Ka}\left\{\frac{v}{u} - \frac{v^2-u^2}{2u^2}\log\frac{v+u}{v-u}\right\}. \qquad (12)$$

Wenn $u$ sich dem Werte von $v$ mehr und mehr nähert, so daß die Anfangsgeschwindig-

1) s. Searle, Phil. Mag., Januar 1907, S. 131—132.

keit sich mehr und mehr der Lichtgeschwindigkeit nähert, so strebt der Ausdruck für die Kraft einem Grenzwert zu. Denn in dem Maße, wie sich $v-u$ der Null nähert, nähert sich auch $(v-u)\log(v-u)$ dem Grenzwert 0, und somit strebt $F_0$ dem Grenzwert

$$F_0 = \frac{Q^2}{2Ka^2} \qquad (13)$$

zu.

Die Formel (11) gibt uns keinen Aufschluß über den Wert von $F_0$, wenn $u$ gleich $v$ ist, denn in diesem Falle wird der Ausdruck unbestimmt. Statt indessen die Kraft $F_0$ aus der Energie und der Bewegungsgröße in dem zusammengesetzten Impulse abzuleiten, können wir (wie in § 6) ihren Wert für den Fall $u=v$ durch direkte Integrierung von $E_x$ über die Oberfläche der Kugel ermitteln, wo $E_x$ die Komponente der elektrischen Kraft in dem Impulse parallel zur Richtung von $u$ ist. Wir finden dann, daß der Wert von $F_0$ für $u=v$ identisch ist mit dem Grenzwert $\frac{Q^2}{2Ka^2}$ des allgemeinen Wertes der Kraft. Es tritt also keine Unstetigkeit in der Kraft auf, wenn $u=v$ wird.

Wenn $\frac{u}{v}$ sehr klein ist, so erhalten wir nach (11):

$$F_0 = \frac{Q^2 u}{3Ka^2 v}. \qquad (14)$$

## § 5. Die Kraft, die erforderlich ist, um eine Kugel mit Volumladung anzuhalten.

Wenn die Kugel vom Halbmesser $a$ eine gleichförmige Volumenladung $Q$ hat, so gestaltet sich die Berechnung der Kraft, die erforderlich ist, um die Kugel anzuhalten, etwas schwieriger, weil die elektrische und die magnetische Kraft nicht über die ganze Tiefe des Impulses konstant sind, welcher entsteht, wenn die Kugel plötzlich angestoßen oder angehalten wird. Nehmen wir zwei parallele Ebenen in den Abständen $z$ und $z+dz$ von der Oberfläche der Kugel, und ist $dQ$ die Ladung zwischen ihnen, so ist:

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{3Qz(2a-z)}{4a^3}.$$

Wie H. A. Lorentz[1]) und Paul Hertz[2]) gezeigt haben, sind die elektrische und die magnetische Kraft zu einer Zeit lange nach der Entstehung eines dieser Impulse in einem Punkte auf dem zu diesen Ebenen senkrechten Halbmesser und in einer Entfernung $z$ von der äußeren Oberfläche des Impulses proportional mit $\frac{dQ}{dz}$.

Es gibt zwei Teile des zusammengesetzten Impulses, wo die einzelnen Impulse, die vom Anhalten und vom Wiederanstoßen der Kugel herrühren, nicht übereinander greifen, und in jedem dieser Teile von der Tiefe $vt$ haben wir gleiche Beträge der Energie und der Bewegungsgröße. Wenn nun ein Impuls erzeugt wird, dadurch daß eine gleiche Kugel mit einer Oberflächenladung $Q$ angestoßen oder angehalten wird, so ist die Energie für die Einheit der Tiefe des Impulses $\frac{W_0}{2a}$, wo $W_0$ durch (8) gegeben ist, während für diesen Fall $\frac{dQ}{dz} = \frac{Q}{2a}$ ist. Wenn daher $W_1$ die Energie in dem Teile des zusammengesetzten Impulses ist, wo die einzelnen Impulse nicht übereinander greifen, so ist:

$$W_1 = 2\frac{W_0}{2a}\int_0^{vt}\left(\frac{dQ}{dz}\right)^2\left(\frac{2a}{Q}\right)^2 dz$$

$$= \frac{W_0}{a}\int_0^{vt}\left\{\frac{3z(2a-z)}{2a^2}\right\}^2 dz$$

$$= \frac{3W_0 v^2 t^2}{8a^5}\left\{8a^2 vt - 6av^2t^2 + \frac{6}{5}v^3t^3\right\}.$$

In dem Teile des zusammengesetzten Impulses, wo die beiden einzelnen Impulse übereinander greifen, ist der effektive Wert von $\frac{dQ}{dz}$:

$$\frac{3Qz(2a-z)}{4a^3} - \frac{3Q(z-vt)(2a-z+vt)}{4a^3},$$

oder:

$$\frac{3Qvt}{4a^3}(2a+vt-2z),$$

denn die elektrischen und magnetischen Kräfte haben in den beiden einzelnen Impulsen entgegengesetzte Richtungen, und die äußeren Oberflächen der beiden Impulse sind durch die Entfernung $vt$ voneinander getrennt. Dieser Teil des zusammengesetzten Impulses erstreckt sich von $z=vt$ bis $z=2a$, und wir erhalten daher, wenn $W_2$ die Energie in diesem Teile ist,

$$W_2 = \frac{W_0}{2a}\int_{vt}^{2a}\left(\frac{dQ}{dz}\right)^2\left(\frac{2a}{Q}\right)^2 dz$$

$$= \frac{W_0}{2a}\int_{vt}^{2a}\left\{\frac{3vt(2a+vt-2z)}{2a^2}\right\}^2 dz$$

$$= \frac{3W_0 v^2 t^2}{8a^5}(2a-vt)^3.$$

1) Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, „Elektronentheorie", S. 188.

2) a. a. O. S. 36; s. auch Searle, Phil. Mag., Januar 1907, S. 123.

Wenn daher $W'$ die Energie in dem zusammengesetzten Impulse ist, so ist:

$$W' = W_1 + W_2 = \frac{3 W_0 v^2 t^2}{8a^5} \left(8a^3 - 4a^2 vt + \frac{1}{5} v^3 t^3\right). \quad (15)$$

In ähnlicher Weise wird, wenn $P_0$ die Bewegungsgröße in dem Impulse ist, der beim Anstoß einer Kugel mit Oberflächenladung entsteht, wo $P_0$ durch (9) gegeben ist, die Bewegungsgröße in dem zusammengesetzten Impulse gegeben durch

$$P' = \frac{3 P_0 v^2 t^2}{8a^5} \left(8a^3 - 4a^2 vt + \frac{1}{5} v^3 t^3\right). \quad (16)$$

Wir können jetzt die Kraft finden, welche erforderlich ist, um die Kugel aufzuhalten, denn wir haben nach (6):

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt}\left(\frac{W'}{u} - P'\right) \\ &= \frac{3v}{8a^5}(16a^3 vt - 12a^2 v^2 t^2 + v^4 t^4)\left(\frac{W_0}{u} - P_0\right) \\ &= \frac{3v}{8a^5} vt(2a - vt)^2 (4a + vt)\left(\frac{W_0}{u} - P_0\right) \\ &= \frac{3Q^2}{16Ka^6}(16a^3 vt - 12a^2 v^2 t^2 + v^4 t^4) \\ &\quad \left(\frac{v}{u} - \frac{v^2 - u^2}{2u^2} \log \frac{v+u}{v-u}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Ist $\mathfrak{F}$ die gesamte Bewegungsgröße, welche seitens des elektromagnetischen Feldes geliefert wird, wenn die Kugel angehalten wird, so haben wir nach (7):

$$\mathfrak{F} = 2\left(\frac{W}{u} - P\right).$$

Nun ist aber, wie Hertz[1]) nachgewiesen hat, $W = \frac{6}{5} W_0$ und $P = \frac{6}{5} P_0$, und demzufolge $\mathfrak{F} = \frac{6}{5} \mathfrak{F}_0$, wo $\mathfrak{F}_0$ durch (12) gegeben ist.

Dasselbe Ergebnis folgt, wenn wir den Ausdruck (17) nach der Zeit von $t = 0$ bis $t = \frac{2a}{v}$ integrieren, denn es ist:

$$\int_0^{\frac{2a}{v}} F dt = \frac{6}{5} \cdot 2\left(\frac{W_0}{u} - P_0\right) = \frac{6}{5} \mathfrak{F}_0.$$

Wenn $u$ sich dem Werte $v$ nähert, so sehen wir, nach Formel (17), daß $F$ dem Grenzwert

$$F = \frac{3Q^2}{16Ka^6}(16a^3 vt - 12a^2 v^2 t^2 + v^4 t^4) \quad (18)$$

zustrebt. Nach einer anderen Methode wird im § 7 bewiesen, daß der Wert von $F$ für $u = v$ gleich dem Grenzwerte (18) ist.

Wenn $\frac{u^2}{v^2}$ sehr klein ist, so erhalten wir nach (10):

$$\frac{W_0}{u} - P_0 = \frac{Q^2 u}{3Kav^2},$$

und aus (17) wird dann

$$F = \frac{Q^2 u}{8 K a^6 v}(16 a^3 v t - 12 a^2 v^2 t^2 + v^4 t^4). \quad (19)$$

Ist $F_0$ die zum Anhalten der Kugel mit Oberflächenladung erforderliche Kraft, so daß also $F_0$ durch (11) gegeben wird, so können wir (17) in der Form

$$F = \frac{3}{8} a^4 (16 a^3 v t - 12 a^2 v^2 t^2 + v^4 t^4) F_0 \quad (20)$$

schreiben.

Der Höchstwert von $F$ tritt dann auf, wenn $vt = a(\sqrt{3} - 1)$ ist, und dieser Höchstwert ist:

$$F_{max} = 9\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) F_0 = 0{,}209\, F_0.$$

## § 6. Die Kraft, welche erforderlich ist, um eine Kugel mit Oberflächenladung anzuhalten, wenn $u = v$ ist.

Wir gehen nun dazu über, nach einer direkten Methode die Kraft zu berechnen, welche erforderlich ist, um eine Kugel mit Oberflächenladung aufzuhalten, wenn die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Wir finden nun die Kraft, welche jedes Element der Ladung zu einer Zeit $t$ erfährt, nachdem die Kugel zur Ruhe gebracht worden ist, und integrieren dann über die Oberfläche der Kugel.

Wenn eine Elementarladung $dQ$ plötzlich angehalten wird, so wird die elektrische Kraft in dem Impulse gegeben[1]) durch

$$dE = \frac{u \sin \gamma}{Kr(v - u \cos \gamma)} \frac{dQ}{p}. \quad (21)$$

Hier ist $r = vt$ die Entfernung von dem Punkte, an welchem die Ladung angehalten wird, und $\gamma$ ist der Winkel zwischen dem von diesem Punkte aus gezogenen Halbmesser und der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit $u$. Ferner ist $p$ die unendlich kleine Breite der Ladung in einer zu $r$ parallelen Richtung gemessen. Die elektrische Kraft $dE$ liegt in der Ebene von $r$ und $u$ und steht im rechten Winkel zu $r$, während sie eine positive Komponente in der Richtung von $u$ hat.

Ist $dE_x$ die Komponente von $dE$ in der

1) a. a. O. S. 49; s. auch Searle, Phil. Mag., Januar 1907, S. 132.

1) s. Searle, Phil. Mag., Januar 1907, S. 121. Der Ausdruck ist zuerst von Heaviside angegeben worden; s. The Electrician, 11. Okt. 1901.

Richtung von $u$, so finden wir, daß, wenn $u = v$ ist,

$$dE_x = dE \sin\gamma = \frac{dQ(1+\cos\gamma)}{Krp} \qquad (22)$$

ist.

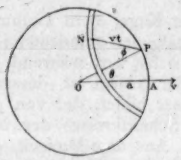



Fig. 1.

Es möge $O$ der Mittelpunkt der Kugel sein, nachdem sie zur Ruhe gebracht ist, und es möge $OA$ die Richtung ihrer Anfangsgeschwindigkeit sein. Es sei $P$ ein Punkt auf der Oberfläche der Kugel, und es sei $POA = \vartheta$. Um $P$ als Mittelpunkt beschreiben wir zwei Kugeln mit den Halbmessern $r$ und $r + dr$, welche die geladene Kugel in zwei Kreisen schneiden. Es sei $N$ ein Punkt auf dem von diesen Kreisen begrenzten Streifen, und es sei $NPO = \varphi$; ferner sei die Ebene $NPO$ gegen die Ebene $POA$ um einen Winkel $\psi$ geneigt.

Da $r = 2a\cos\varphi$ ist, so erhalten wir: $dr = -2a\sin\varphi\, d\varphi$. Nun ist aber der Winkel bei $O$, dessen Sehne die Breite des Streifens bildet, doppelt so groß wie der entsprechende Winkel bei $P$; er ist daher $-2d\varphi$, und die Breite des Streifens ist also $-2a\,d\varphi$ oder $\frac{dr}{\sin\varphi}$. Ist $dQ$ die Ladung auf dem Element des Ringes, welches durch die Ebenen $\psi$ und $\psi + d\psi$ bestimmt wird, so ist:

$$dQ = \frac{Q}{4\pi a^2}(-2a\,d\varphi) r \sin\varphi\, d\psi,$$

während

$$p = dr = -2a\sin\varphi\, d\varphi$$

ist. Es ist daher

$$\frac{dQ}{p} = \frac{Q r\, d\psi}{4\pi a^2},$$

und folglich, auf Grund von (22),

$$dE_x = \frac{Q(1+\cos\gamma)\,d\psi}{4\pi K a^2}. \qquad (23)$$

Einzig und allein der durch $r$ bestimmte Streifen, wo $r = vt$ ist, wirkt durch seinen Impuls zur Zeit $t$ auf $P$ ein, und wir erhalten daher den gesamten Wert des Teiles von $E_x$, welcher von der Wirkung der Impulse herrührt, wenn wir Gleichung (23) nach $\psi$ integrieren.

Nun ist $r\cos\gamma$ die Projektion von $NP$ (nicht von $PN$) auf $OA$, und wir finden daher leicht:

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi\cos\psi. \qquad (24)$$

Daraus folgt:

$$E_x = \int_0^{2\pi} \frac{dE_x}{d\psi}\, d\psi = \frac{Q(1+\cos\vartheta\cos\varphi)}{2Ka^2}.$$

Nun ist aber

$$\cos\varphi = r/2a = vt/2a,$$

und daher:

$$E_x = \frac{Q}{2Ka^2}\left(1 + \frac{vt\cos\vartheta}{2a}\right). \qquad (25)$$

Auf das Element der Ladung in $P$ wirken auch die Ladungen auf der Kugel, deren Entfernungen von $P$ kleiner sind als $vt$, ebenso wie die, deren Entfernungen größer sind als $vt$. Die Elemente im Abstande $vt$ wirken auf das Element in $P$ nach dem gewöhnlichen elektrostatischen Gesetz, und das Element in $P$ wirkt in derselben Weise auf sie. Die Wirkungen zwischen dem Element in $P$ und den Elementen im Abstande $vt$ sind daher im Gleichgewicht und können bei der Berechnung der auf die Kugel im ganzen ausgeübten Kraft außer Betracht gelassen werden. Die Elemente außerhalb des Abstandes $vt$ wirken auf das Element in $P$ in derselben Weise, als wenn sie sich mit der Geschwindigkeit des Lichtes weiter bewegt hätten. Die von diesen Elementen herrührenden elektrischen Kräfte stehen daher senkrecht auf der Richtung von $u$ und tragen demnach in keiner Weise zu der gesamten Kraft bei.

Wenn also $F_0$ die gesamte Kraft ist, welche auf die Kugel zur Zeit $t$ ausgeübt wird, so können wir $F_0$ finden, wenn wir Gleichung (25) über die Oberfläche integrieren. Wir erhalten somit:

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= \int_0^{\pi} \frac{E_x Q}{4\pi a^2} 2\pi a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta \\ &= \frac{Q_2}{4Ka^2}\int_0^{\pi}\left(1 + \frac{vt\cos\vartheta}{2a}\right)\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{Q_2}{2Ka^2} \end{aligned}\right| \qquad (26)$$

Dieser Wert ist gleich dem Grenzwert (13), welchem der allgemeine Ausdruck für die Kraft, (11), zustrebt, wenn $u$ sich dem Werte $v$ nähert. Die Kraft, welche die Kugel erfährt, hat diesen Wert für die Zeit $\frac{2a}{v}$, während welcher der Impuls über die Kugel dahinschreitet. Sobald der Impuls die Kugel verlassen hat, verschwindet die Kraft.

## § 7. Die Kraft, welche erforderlich ist, um eine Kugel mit Volumladung aufzuhalten, wenn $u = v$ ist.

Die Methode des § 6 kann Anwendung finden, wenn es sich darum handelt, die Kraft zu finden, die erforderlich ist, um eine Kugel

mit einer gleichförmigen Volumenladung plötzlich anzuhalten, wenn die Anfangsgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist.

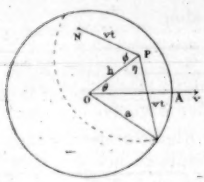


Fig. 2.

In Fig. 2 ist $O$ der Mittelpunkt der Kugel, nachdem sie zur Ruhe gebracht worden ist; $OA$ ist die Richtung ihrer ursprünglichen Geschwindigkeit, und $P$ ist ein beliebiger Punkt innerhalb der Kugel. Es sei $OP = h$ und $POA = \vartheta$, und wir wollen $OA$ zur $x$-Achse wählen. Es sei $N$ ein Punkt in der Kugel im Abstande $r = vt$ von $P$, es möge $NPO = \varphi$ sein, und die Ebene $NPO$ möge um einen Winkel $\psi$ gegen die Ebene $POA$ geneigt sein.

Die Ladung der Volumeneinheit ist $\frac{3Q}{4\pi a^3}$, und somit ist die $x$-Komponente der elektrischen Kraft in $P$, die von dem Impulse herrührt, der aus dem Anhalten der in dem Elementarvolumen $r^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi\, dr$ eingeschlossenen Ladung (von der Dicke $p = dr$) entspringt, gemäß Gleichung (22):

$$dE_x = \frac{3Qr^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi\, dr}{4\pi a^3 \cdot dr} \cdot \frac{1+\cos\gamma}{Kr},$$

wo $\cos\gamma$ durch Gleichung (24) gegeben ist.

Da $r = vt$ ist, so erhalten wir:

$$dE_x = \frac{3Qvt}{4\pi a^3 K} \sin\varphi\,(1+\cos\gamma)\, d\varphi\, d\psi.$$

Die von den Impulsen herrührende $x$-Komponente der elektrischen Kraft in $P$ zur Zeit $t$ erhalten wir, wenn wir diesen Ausdruck über den Teil der Oberfläche der Kugel mit dem Mittelpunkt $P$ und dem Halbmesser $vt$ integrieren, welcher innerhalb der geladenen Kugel liegt. Aus den im § 6 dargelegten Gründen ist die Kraft, welche die ganze Kugel erfährt, gleich der von der Wirkung der Impulse allein herrührenden.

Wenn die Kugel vom Halbmesser $vt$ ganz und gar innerhalb der geladenen Kugel liegt, so geht $\psi$ von 0 bis $2\pi$ und $\varphi$ von 0 bis $\pi$. In diesem Falle erhalten wir:

$$E_x = \frac{3Qvt}{4\pi a^3 K} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varphi\,(1+\cos\gamma)\, d\varphi\, d\psi$$

$$= \frac{3Qvt}{2a^3 K} \int_0^{\pi} \sin\varphi\,(1+\cos\vartheta\cos\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{3Qvt}{a^3 K}. \qquad (27)$$

Wenn die Kugel vom Halbmesser $vt$ teilweise außerhalb der geladenen Kugel liegt, so geht $\psi$ von 0 bis $2\pi$, während $\varphi$ von 0 bis $\eta$ geht, wo $\eta$ der Winkel ist, dessen Sehne bei $P$ ein Halbmesser bildet, der von $O$ nach einem Punkte des Schnittkreises der beiden Kugeln gezogen ist. Aus dem Dreieck, dessen Grundlinie dieser Radius bildet, und dessen Scheitel in $P$ liegt, erhalten wir:

$$\cos\eta = \frac{h^2 + v^2t^2 - a^2}{2hvt}. \qquad (28)$$

In diesem Falle erhalten wir:

$$E_x = \frac{3Qvt}{2a^3 K} \int_0^{\eta} \sin\varphi\,(1+\cos\vartheta\cos\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{3Qvt}{2a^3 K}\left\{1 - \cos\eta + \frac{1}{2}\cos\vartheta\,(1-\cos^2\eta)\right\}. \qquad (29)$$

Die Zeit für den Durchgang des ganzen Impulses über die Kugel kann in zwei Stufen geteilt werden. Auf der ersten Stufe, die von $t = 0$ bis $t = \frac{a}{v}$ dauert, lassen sich einige vollständige Kugeln vom Halbmesser $vt$ beschreiben, auf der zweiten Stufe aber, die von $t = \frac{a}{v}$ bis $t = \frac{2a}{v}$ dauert, sind die Kugeln vom Halbmesser $vt$ alle unvollständig.

Auf der ersten Stufe können wir um jeden beliebigen Punkt innerhalb der Kugel mit dem Mittelpunkt $O$ und dem Halbmesser $a - vt$ vollständige Kugeln vom Halbmesser $vt$ beschreiben.

Nun hat nach (27) $E_x$ überall in der Kugel vom Halbmesser $a - vt$ den konstanten Wert $\frac{3Qvt}{a^3 K}$. Die Ladung innerhalb dieser Kugel ist $\frac{Q(a-vt)^3}{a^3}$, und daher ist, wenn $X_1$ die Kraft an diesem Teile der geladenen Kugel ist,

$$X_1 = \frac{3Qvt}{a^3 K} \cdot \frac{Q(a-vt)^3}{a^3} = \frac{3Q^2 vt(a-vt)^3}{Ka^6}.$$

Ist $X_2$ die Kraft an der Kugelschale mit den Halbmessern $a - vt$ und $a$, so rührt $X_2$ von der Wirkung unvollständiger Kugeln her, und es ist daher:

$$X_2 = \frac{3Q}{4\pi a^3} \cdot \int_0^{\pi}\int_{a-vt}^{a} E_x \cdot 2\pi h^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dh,$$

wo $E_x$ nunmehr durch die Gleichung (29) gegeben ist. Wenn wir nach $\vartheta$ integrieren, so verschwindet das Glied in $E_x$, welches $1-\cos^2\eta$ enthält, und wenn wir daher für $\cos\eta$ seinen Wert aus Formel (28) einsetzen, so finden wir:

$$X_2 = \frac{9}{2}\frac{Q^2 vt}{Ka^6}\int_{a-vt}^{a}\left(1-\frac{h^2+v^2t^2-a^2}{2hvt}\right)h^2\,dh$$

$$= \frac{3}{4}\frac{Q^2v^2t^2}{Ka^6}\left(\frac{9}{4}a^2-3avt+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{8}v^2t^2\right).$$

Die resultierende Kraft $F$ ist gleich $X_1+X_2$ und somit:

$$F=\frac{3}{4}\frac{Q^2vt}{Ka^6}\left\{(a-vt)^3+\frac{9}{4}a^2vt-3av^2t^2+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{8}v^3t^3\right\}$$

$$=\frac{3}{16}\frac{Q^2}{Ka^6}\left\{16a^3vt-12a^2v^2t^2+v^4t^4\right\}. \quad (30)$$

Auf der zweiten Stufe, von $\frac{a}{v}$ bis $\frac{2a}{v}$ kann man keine vollständige Kugel vom Halbmesser $vt$ um einen beliebigen Punkt innerhalb der geladenen Kugel beschreiben. In diesem Falle brauchen wir aber nicht über das ganze Volumen der Kugel zu integrieren, denn die Impulse, welche von allen Elementen der Kugel herrühren, sind jetzt vollständig über den Teil hinweggegangen, der von der Kugel $h=vt-a$ umschlossen wird, und haben diesen Teil von jeglicher Kraft freigelassen, die von Impulsen herrührt.

Integrieren wir über die ganze Kugelschale mit den Halbmessern $vt-a$ und $a$, so finden wir für die Kraft auf der zweiten Stufe:

$$F=\frac{3}{4}\frac{Q}{\pi a^3}\int_0^{\pi}\int_{vt-a}^{a}E_x\cdot 2\pi h^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,dh,$$

wo $E_x$ durch Formel (29) gegeben ist. Somit ist:

$$F=\frac{9}{2}\frac{Q^2vt}{Ka^6}\int_{vt-a}^{a}\left(1-\frac{h^2+v^2t^2-a^2}{2hvt}\right)h^2\,dh$$

$$=\frac{3}{16}\frac{Q^2}{Ka^6}\left\{16a^3vt-12a^2v^2t^2+v^4t^4\right\}. \quad (31)$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit dem, welchen Gleichung (30) für die Kraft auf der ersten Stufe liefert. Die Kraft wird also während der ganzen Zeit ihrer Wirkung durch dieselbe Formel ausgedrückt. Der Wert stimmt auch mit dem Grenzwert (18) überein, dem sich der durch Gleichung (17) ausgedrückte allgemeine Wert der Kraft, wie wir ihn in § 5 gefunden haben, in dem Falle nähert, daß $u$ dem Werte $v$ zustrebt.

## § 8. Vergleichung der Kräfte, die zum Anstoßen und zum Anhalten einer geladenen Kugel erforderlich sind.

Es ist interessant, den Wert, den Hertz für die auf der ersten Stufe beim Anstoß der Kugel erforderliche Kraft gefunden hat, mit dem Werte zu vergleichen, den ich in der vorliegenden Arbeit für die Kraft gewonnen habe, die erforderlich ist, um die Kugel anzuhalten.

### Kugel mit Oberflächenladung.

Aus den Formeln (3) und (11) wird ersichtlich, daß die Kraft zum Anhalten identisch ist mit der Kraft zum Anstoß auf der ersten Stufe der Bewegung. Dieses Ergebnis hätte sich ohne ausführliche Rechnungen vorhersagen lassen. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß die Methode von Hertz zu einer Anstoßkraft führt, welche während der ersten Stufe konstant ist, während meine Methode zu einer konstanten aufhaltenden Kraft führt. Wenn $t=0$ ist, so müssen die beiden Kräfte einander gleich sein, denn zu dieser Zeit ist die Kugel in bezug auf die Impulse in derselben Lage, in der sie sich befindet, wenn sie plötzlich angehalten wird. Da nun jede Kraft konstant ist, so bleiben sie folglich bis zur Zeit $\frac{2a}{(v+u)}$ gleich.

### Kugel mit Volumenladung.

Die für den Fall einer Oberflächenladung angewandte Methode zeigt, daß die Kräfte zur Zeit $t=0$ einander gleich sein müssen. Nun ist aber $\frac{dQ}{dz}$ auf der Oberfläche der Kugel gleich null, und es ist daher leicht ersichtlich, daß sowohl die anstoßende als auch die anhaltende Kraft zur Zeit $t=0$ verschwinden muß. Dieses Ergebnis folgt auch aus den ausführlichen Formeln (4) und (17), denn jeder Ausdruck enthält $t$ als Faktor.

Wenn aber $\frac{u}{v}$ unendlich klein wird, so wird auch die Verschiebung der Kugel während der Zeit $\frac{2a}{(v+u)}$, wenn sie in Bewegung gesetzt wird, unendlich klein, und daher muß für einen solchen Wert von $\frac{u}{v}$ die auf der ersten Stufe des Anstoßes der Kugel erforderliche Kraft der Kraft gleich sein, die erforderlich ist, um sie anzuhalten. Die letztere Kraft dauert während $\frac{2a}{v}$, da aber $\frac{u}{v}$ unendlich klein ist, so kann man die erste Stufe als ebenso lange dauernd ansehen. Vergleicht man den Hertzschen Ausdruck (4) mit dem Ausdruck (19),

so sieht man, daß sie übereinstimmen, wenn $\frac{u^2}{v^2}$ gegenüber der Einheit zu vernachlässigen ist.

Die Länge der zweiten Stufe erstreckt sich von $\frac{2a}{(v+u)}$ bis $\frac{2a}{(v-u)}$ und kann daher als null angesehen werden.

Wenn $u = v$ ist, so erhellt aus (4a) und (31), daß, solange $v^2 t^2$ im Vergleich zu $a^2$ vernachlässigt werden kann, die zum Anhalten erforderliche Kraft anderthalbmal so groß ist wie die zum Anstoß erforderliche.

(Aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 26. August 1907.)

## Neue Beobachtungen bei einer an einem Pol der Sekundärspule eines Teslatransformators strahlenden Antenne.

Von W. Winter.

Verbindet man mit einem Pol der Sekundärspule eines Teslatransformators einen nicht zu dicken, frei in die Luft ragenden, längeren Draht, so zeigt bekanntlich derselbe, während der Transformator arbeitet, auf seiner ganzen Länge prachtvolle Lichtbüschel, deren Mächtigkeit, wie feststeht [1]), abhängt unter anderem von einer mit dem zweiten Pol des Transformators verbundenen Kapazität. Einige weitere hierbei auftretende merkwürdige Erscheinungen, die, wie meine Nachforschungen in der einschlägigen Literatur ergeben, bisher noch nicht bekannt geworden, sind der Gegenstand der weiter unten beschriebenen Versuche.

Zur Beobachtung wurden zwei Methoden angewendet: für den weiter von der Antenne entfernten Bereich das Elektroskop, für die nächste Nähe der strahlenden Antenne Lichtenbergsche Figuren.

Zur Erzeugung der Teslaströme diente ein von der Firma Keiser & Schmidt nach den Angaben von Himstedt, Elster und Geitel gebauter Transformator, dessen Primärspule aus 8 Windungen durch Kautschuk isolierten Drahtes, bestand und dessen Sekundärspule etwa 650 Windungen aufwies. Die Funkenstrecke bestand aus zwei gleichen, mittels Mikrometerschraube verschiebbaren, isolierten Zinkkugeln von 1,5 cm Durchmesser. Als Kondensator wurde in der Regel eine große, dickwandige Kleistsche Flasche und, wo es besonders bemerkt, zwei kleinere von unter sich gleicher Kapazität benutzt. Die Flaschen wurden auf eine isolierende Platte gestellt. Das Induktorium war ein mit Deprez-Unterbrecher versehenes, von 10 cm Schlagweite, welches durch einen Akkumulator-Strom von 4 Volt Spannung und 2 Ampere Stärke gespeist wurde. Um aber die Unabhängigkeit der auftretenden Erscheinungen von der Beschaffenheit des Induktoriums darzutun, wurden auch andere mit Hammer- und Foucaultschem Unterbrecher benutzt. Die verwendete Antenne war, wo nichts anderes angegeben wird, ein glatter, blanker Stahldraht von 80 cm Länge und 0,15 mm Dicke. Bei vergleichenden Untersuchungen wurde stets derselbe Draht benutzt.

Sieht man von den zur Erzeugung von Lichtenbergschen Figuren zu treffenden Vorkehrungen einstweilen ab, so war die Versuchsanordnung, wo nichts anderes angegeben wird, folgende: der als Antenne dienende vorhin erwähnte Stahldraht wurde wohl isoliert zwischen zwei Hartgummistäben, die in schweren Fußklemmen steckten, horizontal gespannt gehalten, hoch genug, um störende Einwirkungen der Tischplatte zu vermeiden. In Verbindung mit dem Transformatorpol stand die Antenne durch einen dicken mit Kautschuk überzogenen Kupferdraht. Das empfindliche Elektroskop wurde in Verbindung mit einer Sonde benutzt. Diese war teils der kräftigeren Wirkung halber, dann aber besonders um eine eindeutige Entfernung von der Antenne bei den Versuchen zu haben, erforderlich. Sie bestand ihrem Zweck entsprechend aus einem 60 cm langen blanken Stahldraht, der mittels zweier in schweren Fußklemmen steckenden Hartgummistäben wohl isoliert, parallel der Antenne gespannt gehalten wurde und dieser genähert oder von ihr entfernt werden konnte. Um Strahlungen des Transformators zum Elektroskop zu verhindern, wurde ein abgeleiteter Metallschirm zwischen beide Apparate geschaltet, der später aber, als sich zeigte, daß sein Fehlen keine Störungen hervorrief, fortgelassen wurde. Die Pole der Primärspule des Transformators wurden durch Kautschuk isolierte dicke Kupferdrähte, der eine mit der innern Belegung der erwähnten großen Leydener Flasche, der andere über die beschriebene Funkenstrecke hin, mit der äußeren Belegung verbunden. Weiterhin standen die Belegungen des Kondensators mit dem Induktorium in Verbindung. Der zweite Pol der Sekundärspule des Teslatransformators wurde bei gewissen Versuchen zur Erde abgeleitet, bei anderen Versuchen sorgfältig isoliert gehalten, welche Maßnahmen auf die Erscheinungen an der Antenne, wie sich zeigen wird, von großem Einfluß sind.

Wurde nun zunächst bei abgeleitetem zweiten Pol der Sekundärspule des Transformators das Induktorium unter Benutzung der angegebenen Stromstärke in Tätigkeit gesetzt, so lud sich das Elektroskop durch die in einem Abstande von

1) E. de Fodor, „Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl", S. 162.

etwa 150 mm[1]) von der strahlenden Antenne befindliche Sonde stark positiv. Rückte man nun die Sonde der Antenne näher, so nahm die Stärke der Ladung immer mehr zu bis zu einem Maximum bei etwa 70 mm Entfernung der Sonde von der Antenne. Wurde der Abstand noch geringer gemacht, so nahm die Stärke der Ladung rasch ab und war bei etwa 35 mm Abstand gleich null. Bei noch geringerer Entfernung der Sonde von der Antenne trat wieder eine Ladung des Elektroskops ein, die sich aber bei der Prüfung auffallenderweise beständig als negativ erwies und bei etwa 20 mm Entfernung der Sonde von der Antenne ein Maximum erreichte. Wurde die Sonde noch näher herangebracht, so trat Funkenübergang von der Antenne zur Sonde ein, und eine Ladung des Elektroskops fand meistens überhaupt nicht, wenn aber, dann in keinem eindeutigem Sinne statt.

Diese merkwürdigen Erscheinungen, deren Richtigkeit immer wieder geprüft wurde und auch bei Verwendung von Induktorien mit Hammer- und Foucaultschem Unterbrecher und bei der Benutzung von anderen Kondensatoren und Antennen von Kupfer, Messing bis 1,6 mm Dicke sich bestätigte und auch durch Umkehren der Stromrichtung im Induktorium sich nicht änderte, erinnern lebhaft an die Beobachtungen, welche die Herren F. Himstedt[2]), A. Pflüger[3]), K. Wesendonck[4]), E. Knoblauch[5]), A. Möhlmann[6]) bei Spitzenstrahlung am Teslapole gemacht haben. Jedoch zeigte bei ihnen das Elektrometer in weiterer Entfernung der Sonde von der strahlenden Spitze negative Ladung und in geringerer Entfernung der Sonde von der Spitze positive, während diese Verhältnisse bei den eben beschriebenen Versuchen umgekehrt liegen: positive Ladung des Elektroskops in weiterer Entfernung der Sonde von der Antenne, negative in geringerem Abstande der Sonde von der Antenne.

Hob man aber nun die Ableitung des zweiten Poles der Sekundärspule des Transformators auf, hielt ihn wohl isoliert, und brachte die Sonde wieder in eine Entfernung von etwa 50 mm von der Antenne, so erfolgte wieder eine Ladung des Elektroskops, aber diesmal erwies sich dieselbe immer als negativ. Rückte man nun die Sonde der Antenne allmählich näher, so nahm die Ladung ab bis null, was bei der in Rede stehenden Versuchsanordnung bei etwa 17 mm Entfernung der Sonde von der Antenne eintrat. Brachte man nun die Sonde noch näher an die Antenne, so erfolgte wiederum eine Ladung des Elektroskops, aber jetzt war sie stets positiv, und der sogenannte Himstedt-Effekt bei Spitzenausstrahlung am Teslapole ist nun auch bei der Antenne vorhanden. Auch diese Versuche wurden oft und unter Verwendung anderer Apparate und anderer Versuchsanordnung geprüft, der Effekt ließ sich immer herbeiführen. Es kann bei isoliertem zweitem Pol der Sekundärspule des Transformators der Fall eintreten, daß bei der Veränderung der Entfernung der Sonde von der Antenne eine Stelle für entgegengesetzte Ladung des Elektroskops für ein Goldblattelektroskop nicht auffindbar ist, man kann dann aber immer durch Veränderung der Stärke des für das Induktorium verwendeten Stromes bewirken, daß eine solche auffindbar für ein gewöhnliches Elektroskop wird. Eine solche Beobachtung scheint auch Herr Himstedt bei der Spitzenstrahlung am Teslapol gemacht zu haben; denn er sagt Wied. Ann. **68**, 300, 1899: „Wurde die Stromstärke passend gewählt, und ließ man die Ausstrahlung längere Zeit bis zu einer Minute dauern, so wurde auch die negative Ladung stark genug, um mit einem gewöhnlichen Goldblattelektroskop untersucht werden zu können." Daß der Himstedt-Effekt bei der Antenne durch die angegebene Maßnahme immer herbeigeführt werden kann, habe ich durch viele Versuche erprobt, auch unter Benutzung von anderen Induktorien, Kondensatoren und der von Herrn Himstedt angegebenen symmetrischen Schaltung.

Ist nun aber bei einer strahlenden Antenne der Himstedt-Effekt herbeigeführt, das heißt, ladet eine der Antenne nähere Sonde infolge der Strahlung jener ein mit ihr verbundenes Elektroskop positiv, eine zweite, weiter von der Antenne entfernte Sonde ein mit ihr verbundenes Elektroskop, wie es den Anschein hat, gleichzeitig negativ, so kann man durch Erden des zweiten Poles der Sekundärspule des Transformators die überraschende Erscheinung erzielen, daß nunmehr eine der Antenne nähere Sonde das mit ihr verbundene Elektroskop negativ, eine weiter von der Antenne entfernte Sonde aber das mit ihr verbundene Elektroskop gleichzeitig, wie es scheint, positiv ladet, daß also eine in diesem Sinne zu verstehende Umkehrung des Himstedt-Effektes durch bloßes Ableiten des zweiten Poles der Sekundärspule des Transformators eintritt.

Die bisherigen Untersuchungen ergeben also, daß eine an einem Teslapol strahlende Antenne von zwei Bereichen umgeben ist, die unter geeigneten Maßnahmen zwei Elektroskope, gleichzeitig wie es scheint, entgegengesetzt

1) Die angegebenen Entfernungen sind natürlich keine ein für allemal festliegenden, sie sind von manchen Faktoren, besonders der Stärke des Speisestromes, der Weite der Funkenstrecke, Konstanten der Apparate abhängig.
2) F. Himstedt, Wied. Ann. **52**, 478 f., 1894; **68**, 294 f., 1899.
3) A. Pflüger, Wied. Ann. **60**, 768 f., 1897.
4) K. Wesendonck, Naturw. Rundsch. **32**, 1895.
5) E. Knoblauch, Ann. d. Phys. **6**, 353 f., 1901.
6) A. Möhlmann, Ann. d. Phys. **8**, 768 f., 1902.

laden, von denen der eine den anderen umschließt, die ferner durch eine das Elektroskop nichtladende Zone voneinander getrennt sind, und die die Reihenfolge ihrer Lage zur Antenne infolge bloßen Ableitens des isolierten zweiten Poles der Sekundärspule des Transformators vertauschen.

Der äußere Bereich erstreckt sich ziemlich weit von der Antenne in den Raum. Einwirkungen desselben auf das Elektroskop ließen sich bei abgeleitetem zweitem Pol des Transformators ohne Sonde noch in 100 cm Entfernung von der Antenne als positiv nachweisen, über diese Entfernung hinaus war offenbar das Elektroskop nicht mehr empfindlich genug. Wurde der zweite Pol des Transformators gut isoliert gehalten, so reichte die das Elektroskop ohne Sonde negativ ladende Wirkung nachweislich 160 cm weit. Mit geeigneteren Vorkehrungen aber kann man sicher diese Wirkungen noch weiter verfolgen. Natürlich sind auch die eben angegebenen Maße relativ und namentlich von der Stärke des Speisestromes des Induktoriums abhängig, sowie von der Leistungsfähigkeit der verwendeten Apparate.

Daß nun die bisher beschriebenen Wirkungen auf Strahlung beruhen, wie die von Herrn Himstedt gefundenen Wirkungen einer am Teslapole strahlenden Spitze, läßt sich durch eine schon von Herrn Himstedt bei seinen Untersuchungen gemachte Probe [1]) zeigen: da sich das Elektroskop, wie oben erwähnt, auch ohne Sonde durch die Strahlung der Antenne ladet, so kann man eine gut abgeriebene Glasglocke über dasselbe stülpen, es tritt dann keine Ladung des Elektroskops durch die strahlende Antenne mehr ein, gleichviel ob der zweite Pol des Transformators abgeleitet wird oder nicht. Die Strahlung wird durch den Isolator aufgehalten [2]), während Influenzwirkungen noch eintreten müßten.

Bei den bisherigen Untersuchungen mit Hilfe der Drahtsonde war es aber nicht möglich, bis in unmittelbare Nähe der Antenne prüfend vorzudringen, der eintretende Funkenübergang von der Antenne zur Sonde ließ, wie erwähnt, keine eindeutigen Beobachtungen mehr zu. Da erwies sich die Methode der Lichtenbergschen Figuren brauchbar und gestattete, weitere bemerkenswerte Erscheinungen zu beobachten. Eine gut gesäuberte, unten schwarz lackierte Glasplatte wurde auf Paraffinklötzen, um störende Einwirkungen von sonst direkt sich unter der Platte befindlichen Leitern oder Halbleitern (Holztischchen) zu vermeiden, horizontal unter die Antenne gebracht, so daß letztere sich fest darüber spannte. Dann wurde gleichmäßig über die Platte Villarsysches Pulver gestreut und das Induktorium der im übrigen unverändert gebliebenen Versuchsanordnung — Elektroskop und Sonde fehlen zunächst — in Tätigkeit gesetzt. Sofort begann auf der Platte eine eigenartige Streifenbildung, die nach Verlauf etwa einer Minute ihre beste Ausbildung erhielt. Figur 1 ist die Photographie einer solchen

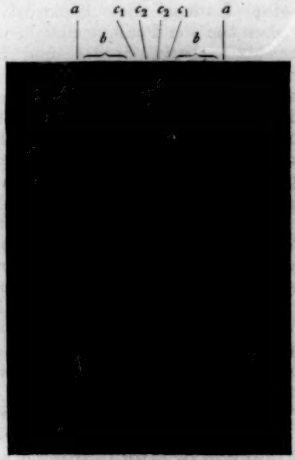



Fig. 1.

Platte. Bei ihrer Herstellung war der zweite Pol der Sekundärspule des Transformators geerdet.

Spannte man nun, indem man die Platte nach Fertigstellung der Figur bei abgeleitetem zweitem Pol des Transformators unter der Antenne beließ, über die Platte jetzt die erwähnte Sonde parallel der Streifung, so zeigte das Elektroskop bei fortgesetzt strahlender Antenne, wenn die Sonde außerhalb der Streifung, aber dicht hinter der äußeren Begrenzung *a* lag, positive Ladung; wurde die Sonde über den Rand *a* in die Streifung, näher nach der Antenne zu gebracht, etwa bis in die Mitte des breiten leeren Streifens *b*, so war die Ladung des Elektroskops negativ, auf der Grenze *a* selbst konnte das Elektroskop durch die Sonde nicht geladen werden. Die Grenze *a* entspricht also der Zone, in der das Elektroskop das Potential null anzeigt, der Streifen *b* dem negativen Bereiche. Außerdem aber weist Fig. 1 zu beiden Seiten der Antenne in ihrer unmittelbaren Nähe noch zwei eigentümliche Doppelstreifen $c_1 c_2$ auf. Über die bei deren Bildung tätigen Kräfte vermag die Sonde keinen Aufschluß zu geben, weil die Doppel-

1) F. Himstedt, Wied. Ann. **68**, 299, 1899.
2) O. Lehmann, Ann. d. Phys. **8**, 679, Satz 6, 1901.

streifen im Bereich des Funkenüberganges von der Antenne zur Sonde liegen, wo eine Ladung des Elektroskops nicht mehr stattfindet. Die Streifen $c_1 c_2$ des Doppelstreifens selbst sind, wie man bei näherer Untersuchung der Fig. 1 bemerkt, sowohl was die Feinheit als auch die Art der Verteilung des Pulvers in ihnen betrifft, verschieden. Der weiter von der Antenne entfernte Streifen $c_1$ zeigt positiven Charakter, der von ihm durch eine feine Linie getrennte $c_2$, näher der Antenne liegend, negativen Charakter. Es läßt sich nun vermuten, daß sie ihre Entstehung einer durch die schwächeren Schwingungen bei den oszillatorischen Entladungen der Kondensatoren [1]) bewirkten Strahlung der Antenne verdanken. Dann wäre aber

Fig. 2.

auch zu erwarten, daß sie, entsprechend wie die durch die stärkere Strahlung der Antenne erzeugten Bereiche verschiedenen elektrischen Charakters bei isoliertem zweitem Pol der Sekundärspule des Transformators ihre Lage zur Antenne veränderten. Dies läßt sich aber aus der Fig. 2, die bei isoliertem zweitem Pol des Transformators erzeugt wurde, nicht erkennen. Die Streifung ist, abgesehen von der bedeutend geringeren Breite, der der Fig. 1 entsprechend. Der Doppelstreifen ist, wie die Figur zeigt, nur stellenweise gut zu sehen; er ist nicht überall gleichmäßig ausgeprägt, weil bei der Herstellung ein tadellos glattes Aufliegen der Antenne nicht zu erreichen war. Doch wurde die Richtigkeit der oben geäußerten Vermutung bestätigt durch die Beschaffenheit der Lichtenbergschen Figuren, die man bei Verwendung des Bürkerschen Dreipulvergemisches [1]) auf der Platte erhält.

Es wurde genau so verfahren wie bei der Herstellung der früheren Figuren, nur wurde statt des Villarsyschen Pulvers ein Gemisch aus 1 Vol. Karmin, 3 Vol. Lykopodium und 5 Vol. Schwefel auf die Platte gestreut. Es bildete sich dann bei abgeleitetem zweitem Pol des Transformators durch die Einwirkung der strahlenden Antenne eine der Fig. 1 in ihren Teilen entsprechende Lichtenbergsche Figur, bei der aber die Streifen des Doppelstreifens in schönster Weise unterschieden waren. Der der Antenne zunächst liegende bestand aus hellgelbem Lykopodiumschwefelpulver, der zweite Streifen des Doppelstreifens aber aus dunklem Karmin. Eine gleich anschließend hergestellte zweite Platte, wobei der zweite Pol des Transformators isoliert gehalten wurde, im übrigen aber die Versuchsanordnung genau dieselbe war, zeigte, daß nun der der Antenne zunächst liegende Streifen des Doppelstreifens aus Karmin bestand, der andere Streifen des Doppelstreifens dagegen aus Lykopodjumschwefelpulver. Nun wird durch positive Elektrizität aus dem Pulvergemisch Karmin herausgezogen, durch negative Elektrizität das Lykopodiumschwefelpulver.

Es zeigen demnach die Streifen des Doppelstreifens noch zwei Bereiche verschiedenen elektrischen Charakters um die strahlende Antenne an, die in ihrer Reihenfolge von der Antenne aus bei abgeleitetem zweitem Pol des Transformators genau sich so anordnen, wie die in diesem Falle durch das Elektroskop ermittelten, und die ebenso wie die letzteren bei Isolierung des zweiten Poles des Transformators die Reihenfolge ihrer Lage zur Antenne wechseln. Sie zeigen dasselbe Verhalten wie die durch das Elektroskop ermittelten Bereiche, sind also höchstwahrscheinlich gleichen Ursprungs und schwächeren Strahlungen der Antenne infolge schwächerer Schwingungen bei der Kondensatorentladung zuzuschreiben. Auch diese Versuche sind oft wiederholt und bestätigten sich immer.

Die beschriebenen Beobachtungen mit Elektroskop und Lichtenbergschen Figuren lassen erkennen, daß eine an einem Teslapol strahlende Antenne von vier zylindrischen Bereichen umgeben ist, von denen je zwei benachbarte sich durch entgegengesetzten elektrischen Charakter unterscheiden, und die ferner die Eigenschaft besitzen, daß sie, wenn der zweite Pol der Sekundärspule des Transformators, der zunächst isoliert sein mag, abgeleitet wird, paarweise die Reihenfolge ihrer Lage zur Antenne

1) F. Richarz und W. Ziegler, Ann. d. Phys. 1, 468 f., 1900.

1) K. Bürker, Ann. d. Phys. 1, 474 f., 1900.

ändern, so daß, wenn man bei isoliertem zweitem Pol des Transformators den der Antenne zunächst liegenden Bereich mit I, den sich daran schließenden von entgegengesetzt elektrischem Charakter mit II und die beiden folgenden mit III und IV bezeichnet, nach Ableitung des zweiten Poles die Reihenfolge der Lage zur Antenne II I IV III ist.

Die vielen bei diesen Versuchen auftretenden, überaus merkwürdigen Erscheinungen alle befriedigend zu erklären, dazu bedarf es noch einer gründlichen Untersuchung der Einzelheiten, wozu mir vorderhand die Zeit fehlt. Nur folgenden Punkt möchte ich einer Erörterung unterziehen: Wie erklärt es sich, daß eine der strahlenden Antenne nähere Sonde ein mit ihr verbundenes Elektroskop im entgegengesetzten Sinne ladet wie eine weiter von der Antenne entfernte Sonde ein mit ihr verbundenes Elektroskop und zwar, wie es scheint, gleichzeitig? Die Gleichzeitigkeit, um damit zu beginnen, ist in der Tat nur eine scheinbare; denn beachtet man, daß ja die Antenne sehr schnell wechselnde Ladung erhält, so erkennt man, daß die durch die Strahlung erzeugten Bereiche nicht koexistieren, sondern sehr schnell alternieren, daß also die Aufladung der Elektroskope keine gleichzeitige, sondern eine schnell abwechselnd erfolgende ist, was freilich zunächst den Anschein der Gleichzeitigkeit hervorrufen muß.

Durch diese Erläuterung aber sind die Schwierigkeiten für die Erklärung des Himstedt-Effektes und seiner sogenannten Umkehrung noch nicht behoben. Denn wenn auch bei vorhandenem Himstedt-Effekt an der Antenne die Annahme wohl berechtigt ist, daß die negative Elektrizität weiter vordringe und die entferntere Sonde nur noch allein erreiche, so ist doch zu beachten, daß diese negative Strahlung die nähere Sonde, die bei den beschriebenen Versuchen mit der entfernteren völlig gleichartig war, auch passiert hat und sie doch ebenfalls negativ geladen hat. Diese Ladung kann dann freilich durch die folgende positive Strahlung wieder aufgehoben werden, vorausgesetzt, daß die positive Strahlung gleiche Mengen Elektrizität an die Sonde abgibt wie die negative. Dabei würde das Elektroskop, das mit der der Antenne näheren Sonde verbunden ist, anscheinend ungeladen bleiben, weil das Blättchen die zu schnell aufeinander folgenden Ladungen und Aufhebungen der Ladungen nicht anzuzeigen vermag. Um aber die tatsächlich dann erfolgende positive Ladung der der Antenne näheren Sonde zu erklären, ist noch die Annahme erforderlich, daß die positive Strahlung die in Rede stehende Sonde irgendwie kräftiger beeinflußt — ob infolge größerer Menge positiver Elektrizität oder sonstwie, bleibe einstweilen unentschieden — als wie die sie gleich darauf wieder passierende negative, so daß nach jedesmaligem Strahlungswechsel eine positive Restladung in der Sonde übrig bleiben muß. Diese Restladungen laden dann das mit der Sonde verbundene Elektroskop nach und nach auf. Ganz entsprechende Annahmen sind bei der sogenannten Umkehrung des Himstedt-Effektes zu machen. Durch die Ableitung des zweiten Poles der Sekundärspule des Transformators wird das positive Potential der Antenne viel höher als wie das negative, was daraus geschlossen wird, daß diesmal die positive Strahlung viel weiter in den Raum vordringt als wie die negative. Es erreicht dann bei der sogenannten Umkehrung des Himstedt-Effektes nur noch die weiter vordringende positive Strahlung die entferntere Sonde, während jetzt die negative Strahlung die nähere Sonde, die zwar auch von der positiven Strahlung getroffen wird, stärker beeinflußt und sie deshalb negativ ladet.

Wie kommt nun aber bei dem Himstedt-Effekt die stärkere Beeinflussung der der Antenne näheren Sonde durch die positive Strahlung und bei der sogenannten Umkehrung des Himstedt-Effektes die stärkere Beeinflussung der der Antenne näheren Sonde durch die negative Strahlung zustande? Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß die naheliegende Annahme von verschieden großen Mengen ausgestrahlter positiver und negativer Elektrizität allein in Anbetracht der auftretenden Erscheinungen zu einer Erklärung derselben nicht genügt. Der Himstedt-Effekt erfordert bei der alleinigen Annahme von verschieden großen Mengen ausgestrahlter positiver und negativer Elektrizität infolge der positiven Ladung der der Antenne näheren Sonde, daß bei jeder Oszillation eine größere Menge positiver Elektrizität ausgestrahlt werde als wie negative, weil sonst bei der erwähnten Annahme allein sich die positive Ladung der der Antenne näheren Sonde nicht erklären läßt, wobei dann, wie der Versuch lehrt, die geringere Menge negativer Elektrizität bei der für sie vorhandenen Spannung weiter in den Raum vordringt als wie die positive. Daraus würde sich ergeben, daß schon bei einer ausgestrahlten Menge negativer Elektrizität, die kleiner ist, als die bei jeder Oszillation ausgestrahlte Menge positiver Elektrizität, die negative Strahlung weiter in den Raum vordringt. Dann müßte bei gleichen Mengen und bei der Annahme, daß die Stromstärke von der Höhe des Potentials der Antenne abhängig ist, eine Annahme, die wohl berechtigt ist[1]) infolge der zur Vergrößerung der negativen Stromstärke erforder-

[1]) J. Stark, „Die Elektrizität in Gasen", S. 190.

lichen Potentialerhöhung und der damit verbundenen erhöhten Ionengeschwindigkeit die negative Strahlung erst recht weiter vordringen als wie die positive. Nun verlangt aber bei der alleinigen Annahme verschieden großer Mengen ausgestrahlter positiver und negativer Elektrizität die sogenannte Umkehrung des Himstedt-Effektes als Erklärung für die negative Ladung der der Antenne näheren Sonde bei jeder Oszillation größere Mengen negativer Elektrizität als wie positiver, das will sagen, das negative Potential der Antenne müßte sich noch mehr erhöhen, um nicht bloß gleiche, sondern größere Mengen negativer Elektrizität ausstrahlen zu lassen als wie positiver, mithin müßte dann infolge der noch mehr erhöhten Ionengeschwindigkeit die negative Strahlung jedenfalls weiter vordringen als wie die positive. Das Gegenteil zeigt aber der Versuch bei der sog. Umkehrung des Himstedt-Effektes. Mithin führt die Annahme von ungleichen Mengen ausgestrahlter positiver und negativer Elektrizität für sich allein zu Widersprüchen in den Erscheinungen. Damit ist aber nicht gesagt, daß bei den in Rede stehenden Vorgängen überhaupt keine ungleichen Mengen positiver oder negativer Elektrizität ausgestrahlt werden. Für das Folgende ist zu beachten, daß jedesmal die weniger weit vordringende Strahlung die der Antenne nähere Sonde stärker beeinflußt. Das ist ein Hinweis darauf, daß die Beeinflussung der Sonden durch die Ionen wesentlich abhängig ist von der Geschwindigkeit, mit der die Ionen die Sonden passieren. Setzt man voraus, daß die weiter in den Raum vordringenden Ionen auch eine größere Anfangsgeschwindigkeit besitzen als die weniger weit vordringenden, so bewegt sich die weiter vordringende Ionenart mit einer größeren Geschwindigkeit an der der Antenne näheren Sonde vorbei als die weniger weit vordringende Ionenart, und da nun, wie aus den Versuchen des Herrn O. Lehmann[1]) hervorgeht, Drähte auf elektrisierte Luft sozusagen eine saugende Wirkung ausüben, weil durch die Maschen eines abgeleiteten Drahtgeflechtes, dessen Maschen kleiner als von einem Zentimeter Durchmesser waren, bei den von ihm angestellten Versuchen keine elektrisierte Luft mehr hindurchtrat, so werden die Sonden ebenfalls eine anziehende Wirkung auf die ihre Nähe passierenden Ionen ausüben. Dabei wird die der Antenne nähere Sonde von den ihre Nähe passierenden Ionen mit größerer Geschwindigkeit weniger zu sich heranziehen können als von den sie mit geringerer Geschwindigkeit passierenden Ionen, und so wird die von der Sonde aufgenommene Elektrizitätsmenge der sich schneller bewegenden Ionen geringer sein als wie die von den sich langsamer bewegenden Ionen. Mithin muß die weniger weit vordringende Strahlung die der Antenne nähere Sonde stärker beeinflussen, wie das bei dem Himstedt-Effekt und seiner sogenannten Umkehrung in der Tat der Fall ist. Dabei ist nicht erforderlich, daß die bei jeder Oszillation ausgestrahlten Mengen positiver und negativer Elektrizität gleich sind, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen können sie verschieden sein.

Da nun bei den gemachten Annahmen sehr wohl der Fall eintreten kann, daß in einer gewissen Entfernung von der Antenne die Sonde von der sich weniger weit erstreckenden Strahlung nur noch in dem Maße geladen wird, als sie auch von der sich weiter erstreckenden Strahlung Elektrizitätsmengen aufzunehmen vermag, mithin also stets die resultierende Ladung Null hat, so erklärt sich durch dieselben Annahmen auch die Entstehung des Bereiches zwischen dem positiven und negativen, in dem das Elektroskop durch die Sonde überhaupt nicht geladen wird.

## Zusammenstellung der Ergebnisse.

1. Der von Herrn Himstedt bei einer an einem Teslapol strahlenden Spitze beobachtete Effekt kann auch bei einer an einem Teslapol strahlenden Antenne erhalten werden.

2. Der Himstedt-Effekt an der strahlenden Antenne ist umkehrbar, das heißt, wird bei einer an einem Teslapol strahlenden Antenne eine ihr nähere Sonde positiv, eine entferntere durch die Strahlung negativ geladen, so kann man durch Erden des zweiten Poles der Sekundärspule des Transformators bewirken, daß nunmehr eine der Antenne nähere Sonde negativ, eine entferntere positiv durch die Strahlung geladen wird.

3. Bei dem Himstedt-Effekt und seiner sogenannten Umkehrung weist die Antenne viererlei Strahlungen auf, die sehr schnell abwechseln und den Anschein von vier koexistenten, konaxialen, zylindrischen Bereichen um die Antenne erwecken, von denen je zwei benachbarte entgegengesetzt elektrischen Charakter erkennen lassen, und von denen die beiden äußeren zwischen sich für das Elektroskop einen Abfall des Potentials bis zur Null aufweisen.

4. Wie bei der sogenannten Umkehrung des Himstedt-Effektes die beiden äußeren Bereiche, so ändern durch Ableiten des isolierten zweiten Poles des Transformators auch die beiden innereren ihre Lage zur Antenne.

5. Die bei dem Himstedt-Effekt und seiner sogenannten Umkehrung anscheinend gleichzeitig erfolgende, entgegengesetzte Auf-

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. **6**, 679, Satz 7, 1901.

ladung zweier Elektroskope läßt sich den beschriebenen Untersuchungen zufolge aus dem schnellen Abwechseln der betreffenden Strahlungen und der vorhandenen verschiedenen Geschwindigkeit der Ionenarten zwanglos erklären. Dieselben Umstände genügen auch zur Erklärung des Vorhandenseins eines Bereiches, in welchem das Elektroskop keine Ladung zeigt, der zwischen den Bereichen, in denen das Elektroskop geladen wird, liegt.

Hagen, den 16. September 1907.

(Eingegangen 18. September 1907.)

## Leuchtschilder für den Experimentiertisch bei verdunkeltem Hörsaal.

Von H. J. Reiff.

Bei Demonstrationen im verdunkelten Hörsaale bedient man sich, um Gegenstände, welche zum jeweiligen Versuch notwendig sind, rasch und sicher aufzufinden, einer kleinen Lampe, deren Strahlen durch passende Schirme gegen die Zuhörer abgeblendet sind. Der Experimentierende wird aber durch die Lampe, selbst wenn sie ziemlich dunkel brennt, immer etwas geblendet, so daß er feinere Lichtunterschiede und lichtschwache Erscheinungen, auf welche er die Zuhörer aufmerksam machen soll, erst nach einer gewissen Zeit wahrzunehmen vermag.

Besonders bei der Demonstration der Erscheinungen in Vakuumröhren habe ich es sehr störend empfunden, daß ich erst einige Zeit nach dem Abschirmen der Lampe imstande war, auf die verschiedenen charakteristischen Lichterscheinungen hinzuweisen, nachdem sie zum Teil schon längst eingetreten und von den Zuschauern beobachtet waren.

Zur Bezeichnung der Stellen des Tisches, an welchem solche Gegenstände, die demnächst gebraucht werden sollen, bereit gelegt sind, habe ich nun mit Vorteil Buchstaben und Zahlen benutzt, welche aus Blech geschnitten und mit Leuchtfarbe überzogen sind. Ebenso dienen leuchtende Plus- und Minuszeichen zur Kenntlichmachung der Pole von Leitungen, die in der Dunkelheit angeschlossen oder gelöst werden sollen. Die leuchtende Seite der Buchstaben ist dem Vortragenden zugekehrt, damit die Zuhörer von ihnen nicht in der Aufmerksamkeit gestört werden. Zur Befestigung der Zeichen dienen kleine Stativchen, mit deren Hilfe sie auf den Tisch gestellt werden können oder aber Federklemmen zum Anklammern an andere Apparate, an Drähte oder dergl.

Ist an irgendeiner Stelle bei einer Versuchsanordnung eine Lichterscheinung o. ä. zu erwarten, so muß man die Zuhörer noch im unverdunkelten Zimmer darauf aufmerksam machen und in der Zeit, die zum Verdunkeln notwendig ist, verlieren diese gewöhnlich die durch Fixieren festgehaltene Richtung, so daß sie dann die zu demonstrierende Erscheinung gar nicht oder jedenfalls nicht ihren Beginn wahrnehmen. Auch in diesem Falle erweisen sich kleine Leuchtschilder zur Bezeichnung der Stellen, wohin die Aufmerksamkeit zu richten ist, sehr nützlich, aus großer Entfernung werden sie erkannt und blenden den Zuschauer keineswegs.

Solche Schilder habe ich zum Beispiel bei Versuchen über Tribo- und Chemilumineszenz zur Bezeichnung der einzelnen Stellen, wo zu beobachten war, benützt, und sie störten in keiner Weise diese Versuche, welche bekanntlich ein ziemlich ausgeruhtes Auge zur Wahrnehmung erfordern.

Vielleicht veranlaßt diese Mitteilung den einen oder andern Experimentator, ebenfalls solche Schilder zu verwenden; sie sind zu beziehen von Arthur Pfeiffer in Wetzlar, welcher auf sie einen Schutztitel besitzt.

Wetzlar, September 1907.

(Eingegangen 22. September 1907.)

## Das Marmarometer oder Resonanzflimmerphotometer.[1])

Von J. J. Taudin Chabot.

Eine bisher nicht gewürdigte gute Eigenschaft des Flimmerphotometers bedeutet die leichte Möglichkeit der Vermeidung jeder unmittelbaren Beanspruchung der Sehkraft durch Wahrnehmung schwankender Helligkeiten, welche vielfach das Arbeiten mit diesem Instrument zufolge des wiederholten schnellen Helligkeitswechsels in wohl höherem Grade als ein solches mit den anderen Photometertypen bedenklich erscheinen läßt.

Es kann nämlich das Flimmerphotometer unmittelbar mit einem auf Helligkeitswechsel reagierenden Organ versehen und gegen dieses die Flimmerung geleitet werden. Jedes strahlempfindliche Dispositiv kommt hier in Betracht: das Radiophon zur akustischen Beobachtung, — die aktinoelektrische Röhre, die trockene oder feuchte Selenzelle usw. im Lokalstromkreise gleichfalls zur akustischen, oder aber zur optischen Beobachtung, mittels des Telephons oder mittels des Saitengalvanometers, das mit einer konstanten Saitenausbuchtung anzeigt, wenn die Flimmerung aufgehört hat, d. h. die Helligkeiten äquivalent sind.

1) Meine frühere Mitteilung an den Herausgeber des Phil. Mag., Mai 1907.

Ein ganz besonderer Vorteil der Methode liegt nun aber noch darin, daß sie die Mitarbeit von Resonanzeffekten und solchergestalt eine bedeutend höhere Empfindlichkeit als auf jedem anderen Wege zu erreichen gestattet durch Abstimmen, sei es einer am Radiophon angebrachten Schallkammer, sei es der Saitenspannung am Galvanometer, auf eine mit derjenigen der Flimmerung übereinstimmende Eigenfrequenz.

Das Marmarometer eignet sich zur Wahrnehmung von Helligkeitsunterschieden beliebiger Provenienz, ursprünglichen, von verschiedenen Quellen herrührenden, sowohl wie gewordenen, durch Drillung von Strahlungsebenen, Absorption (Diaphanometer) usw. entstandenen.

Hohenwaldau b. Stuttgart, 27. Juli 1907.

(Eingegangen 14. August 1907.)

## Die Berechnung der Durchbiegung von Stäben, deren Material dem Hookeschen Gesetze nicht folgt.

Von Eugen Meyer.

Für ein Material, das dem Hookeschen Gesetze nicht folgt, sei auf Grund eines einfachen Zug- und Druckversuches der Zusammenhang $\varepsilon = f(\sigma)$ zwischen Dehnung und Normalspannung in der Kurve $ABC$ der Fig. 1 gegeben. Mit

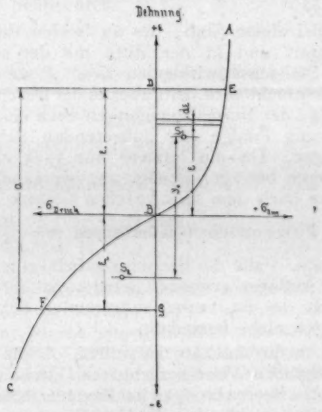



Fig. 1.

Hilfe des v. Bach-Schüleschen Verfahrens[1]), das die Randspannungen im Stabquerschnitt für ein gegebenes Biegungsmoment bestimmt, und unter denselben Voraussetzungen, die zu diesem Verfahren führen, lassen sich aus der Kurve $ABC$ leicht die Durchbiegung und die Neigung der elastischen Linie auf zeichnerischem Wege berechnen. Die Voraussetzungen sind, daß bei der Biegung die Stabquerschnitte eben bleiben und daß der Zusammenhang zwischen Dehnung und Normalspannung in den Fasern des gebogenen Stabes gleich ist wie in den Zug- und Druckstäben. Die Rechnung gestaltet sich für den rechteckigen Querschnitt von der Breite $b$ und der Höhe $h$ wie folgt:

Die äußerste Zugfaser im Abstande $e_1$ von der neutralen Achse besitze die Spannung $\sigma_1 = DE$ und die Dehnung $\varepsilon_1 = BD$, das diese Spannung hervorrufende Biegungsmoment sei $M_b$. Schneidet man durch die Parallele $FG$ zur Spannungsachse auf der Druckseite der Dehnungskurve die Fläche $BFG =$ Fläche $BDE$ ab, so ist $\sigma_2 = FG$ die Spannung, $BG = \varepsilon_2$ die Dehnung der äußersten Druckfaser im Abstand $e_2 = h - e_1$ von der neutralen Faser. Da die Dehnung $\varepsilon$ einer Faser im Abstand $\eta$ von der neutralen Achse proportional diesem Abstand ist, so erhält man mit $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = a$ die Beziehungen

$$\eta = \frac{\varepsilon}{a} h, \qquad e_1 = \frac{\varepsilon_1}{a} h, \qquad e_2 = \frac{\varepsilon_2}{a} h.$$

Der Gleichgewichtsbedingung

$$\Sigma \sigma dF = b \int_{-\varepsilon_2}^{+\varepsilon_1} \sigma d\eta = \frac{bh}{a} \int_{-\varepsilon_2}^{+\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon = 0$$

ist daher durch das Gleichsetzen der Flächen

$$BDE = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon \text{ und } BFG = \int_0^{\varepsilon_2} \sigma d\varepsilon \text{ entsprochen.}$$

Das Biegungsmoment $M_b$, das die Randspannungen $\sigma_1$ und $\sigma_2$ hervorruft, erhält man aus der Gleichung

$$M_b = \Sigma \sigma \eta dF = b \int_{-\varepsilon_2}^{+\varepsilon_1} \sigma \eta \, d\eta = \frac{bh^2}{a^2} \int_{-\varepsilon_2}^{+\varepsilon_1} \sigma \varepsilon \, d\varepsilon = bh^2 \frac{M_0}{a^2}.$$

$M_0 = \int_{-\varepsilon_2}^{+\varepsilon_1} \sigma \varepsilon d\varepsilon$ bedeutet die Summe der statischen Momente der beiden gleichen Flächen $BDE$ und $BFG$ bezogen auf die $\sigma$-Achse und kann leicht ermittelt werden.

Auf diese Weise ist es möglich, wie v. Bach a. a. O. gezeigt hat, für jede Randspannung $\sigma_1$ und Randdehnung $\varepsilon_1$ das zugehörige Biegungsmoment $M_b$ zu bestimmen.

Wenn die Dehnung in der äußersten Faser $\varepsilon_1$ ist, verstellen sich aber zwei ursprünglich parallele, um $dx$ voneinander abstehende Quer-

1) C. Bach, Elastizität und Festigkeit. 4. Aufl., S. 244 ff.

schnitte um den Winkel $d\varphi = \frac{\varepsilon_1 dx}{e_1}$ und um diesen Winkel weichen auch die beiden Tangenten an die elastische Linie für die beiden Querschnitte voneinander ab.

Für einen Stab von der Länge $l$, der in der Mitte zwischen zwei freien Auflagern durch die Einzellast $P$ beansprucht wird, ist demnach die Neigung der elastischen Linie am Auflager, d. i. der Biegungsendwinkel

$$\beta = \int_0^{\frac{l}{2}} d\varphi = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\varepsilon_1 dx}{e_1}.$$

Die Durchbiegung, die in der Mitte durch die Normalspannungen hervorgerufen wird, ist

$$f = \int_0^{\frac{l}{2}} x\, d\varphi = \int_0^{\frac{l}{2}} x \frac{\varepsilon_1}{e_1} dx.$$

Nun hängen die Größen $M_b$ und $M_0$ mit der Entfernung $x$ des Querschnittes vom Auflager durch die Gleichung zusammen:

$$\frac{P}{2} x = M_b = bh^2 \frac{M_0}{a^2}.$$

Da ferner $e_1 = \frac{\varepsilon_1 h}{a}$, so erhält man:

$$\beta = \frac{2}{P} bh \int_{\frac{M_0}{a^2}=0}^{\frac{M_0}{a^2}=\frac{Pl}{4bh^2}} a\, d\left(\frac{M_0}{a^2}\right),$$

$$f = \frac{4}{P^2} b^2 h^3 \int_{\frac{M_0}{a^2}=0}^{\frac{M_0}{a^2}=\frac{Pl}{4bh^2}} a\left(\frac{M_0}{a^2}\right) d\left(\frac{M_0}{a^2}\right).$$

Für die obere Integrationsgrenze war in beiden Fällen statt $\frac{l}{2}$ derjenige Wert von $\frac{M_0}{a^2}$ zu setzen, der sich aus der Beziehung $\frac{Pl}{4} = bh^2 \frac{M_0}{a^2}$ ergibt. Nun kann sowohl die Kurve der $a$ in Funktion von $\frac{M_0}{a^2}$ als auch diejenige der $a\left(\frac{M_0}{a^2}\right)$ in Funktion von $\frac{M_0}{a^2}$ aufgezeichnet werden. Die von diesen Kurven, der Abszissenachse und der Endordinate $\frac{M_0}{a^2} = \frac{Pl}{4bh^2}$ eingeschlossenen Flächen seien $F_\beta$ und $F_f$.

Dann ist der durch die Belastung $P$ hervorgerufene Biegungsendwinkel

$$\beta = \frac{2}{P} bh F_\beta,$$

die Durchbiegung in der Mitte infolge der Normalspannungen $f = \frac{4}{P^2} b^2 h^3 F_f$.

Die Kurven, welche die Flächen $F_\beta$ und $F_f$ begrenzen, sind nur von der Gestalt der Dehnungskurve $\varepsilon = f(\sigma)$ und nicht von den Stababmessungen unabhängig. Sie können daher für ein bestimmtes Material ein für allemal aufgezeichnet werden und es richtet sich dann nur der Grenzwert $\frac{M_0}{a^2}$, bis zu dem die Integration vorgenommen werden muß, nach den gegebenen Größen $P$, $l$, $b$, $h$ der Aufgabe. Gleichen Grenzwerten von $\frac{M_0}{a^2}$ entsprechen gleiche Randspannungen im gefährlichen Querschnitt. Aus zusammengehörigen Werten $P_1$, $\beta_1$ und $f_1$ für einen Stab von den Abmessungen $l_1$, $b_1$, $h_1$ lassen sich ebensoviele zusammengehörige Werte $P_2$, $\beta_2$ und $f_2$ für einen zweiten Stab aus demselben Material von den Abmessungen $l_2$, $b_2$, $h_2$ lediglich durch Beziehungen zwischen den Größen $l_1$, $b_1$, $h_1$, $l_2$, $b_2$, $h_2$ berechnen, ohne daß man auf die Ermittelung der Werte von $F_\beta$ und $F_f$ zurückzugreifen braucht.

Falls der Stab nicht rechteckigen Querschnitt, sondern veränderliche Breite $b$ besitzt, ist die Rechnung etwas umständlicher, aber grundsätzlich gleich wie für den rechteckigen Stab.

Bei einem Stab, der an beiden Enden frei gelagert und in der Mitte mit der senkrecht zur Stabachse wirkenden Kraft $P$ auf Biegung beansprucht wird, tritt aber zu der Durchbiegung infolge der Normalspannungen noch eine Durchsenkung infolge der auftretenden Schubspannungen. Da die letztere nur 3—5 v. H. der ersteren beträgt, genügt es, sie annäherungsweise nach dem Hookeschen Gesetze und mit der Poissonschen Konstanten $m = \frac{10}{3}$ zu ermitteln. Falls die Biegungsendwinkel außerhalb der Auflager gemessen werden, ist ihre Größe durch die im Stabe auftretenden Schubspannungen nicht beeinflußt.

Um für Gußeisen zu prüfen, ob die auf die angegebene Weise berechneten Durchbiegungen mit den Beobachtungen bei Biegeversuchen übereinstimmen, ob also die Annahmen, auf denen die Rechnung beruht, richtig sind, dafür lagen mir Versuche der Herren Pinegin und Kestner vor, die in dem von mir geleiteten Festigkeitslaboratorium an einer großen Zahl gußeiserner Stäbe, die alle aus derselben Pfanne gegossen wurden, gemacht sind. Über die Versuche hat Herr Pinegin in der Zeitschr. d. Ver. deutsch.

Ing. 1906, S. 2029 berichtet. Die Dehnungskurve des Materials ergab sich aus Mittelwerten, die durch zahlreiche Zug- und Druckversuche gewonnen sind. Sämtliche Biegestäbe waren bearbeitet, ihre freie Auflagerlänge betrug $l = 1000$ mm. Die Durchbiegungen wurden mittels des Bauschingerschen Rollenapparates in der 100 t Werdermaschine des Laboratoriums gemessen. Die in der folgenden Zusammenstellung dafür angegebenen Zahlen sind der Mehrbetrag der Durchbiegung $f_P$ bei der angegebenen Last $P$ über die Durchbiegung $f_{500}$ bei 500 kg Belastung.

1. 2 Stäbe von rechteckigem Querschnitt $b = 5$ cm und $h = 10$ cm.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Belastung $P$ in kg | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 |
| Berechnete Durchbiegung $f_P - f_{500}$ in mm: infolge der Normalspannungen | 0,290 | 0,910 | 1,648 | 2,496 | 3,476 | 4,716 |
| Berechnete Durchbiegung $f_P - f_{500}$ in mm: infolge der Schubspannungen | 0,008 | 0,024 | 0,041 | 0,058 | 0,076 | 0,093 |
| Berechnete Durchbiegung $f_P - f_{500}$ in mm: insgesamt . . . . | 0,30 | 0,93 | 1,69 | 2,55 | 3,55 | 4,81 |
| Beobachtete Durchbiegung $f_P - f_{500}$ in mm: Stab I . . . . . | 0,34 | 0,97 | 1,70 | 2,50 | 3,48 | 4,74 |
| Beobachtete Durchbiegung $f_P - f_{500}$ in mm: Stab II . . . . . | 0,26 | 0,89 | 1,60 | 2,38 | 3,32 | 4,65 |
| Beobachtete Durchbiegung $f_P - f_{500}$ in mm: Mittelwert für beide Stäbe | 0,30 | 0,93 | 1,65 | 2,44 | 3,40 | 4,60 |
| Unterschied der berechneten und der beobachteten Durchbiegung in v. H. der letzteren | 0 | 0 | +2,4 | +4,3 | +4,2 | +4,4 |

2. 1 Stab von quadratischem Querschnitt 8×8 qcm.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Belastung $P$ in kg | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 |
| $f_P - f_{500}$ berechnet insgesamt mm | 0,36 | 1,14 | 2,05 | 3,07 | 4,24 | 5,77 |
| $f_P - f_{500}$ beobachtet „ | 0,32 | 1,35 | 1,96 | 2,93 | 4,10 | 5,50 |
| Unterschied v. H. . . . . | +12 | −15 | +4,6 | +4,8 | +3,4 | +4,9 |

3. 3 Stäbe von kreisringförmigem Querschnitt, äußerer Durchmesser 9,99 cm, innerer Durchmesser 6,04, 6,00 und 6,07 cm.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Belastung $P$ in kg | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 |
| $f_P - f_{500}$ berechnet insgesamt mm | 0,27 | 0,94 | 1,64 | 2,48 | 3,47 | 4,63 |
| $f_P - f_{500}$ beobachtet mm: Stab I | 0,26 | 0,86 | 1,61 | 2,44 | 3,46 | — |
| $f_P - f_{500}$ beobachtet mm: Stab II | 0,28 | 0,94 | 1,62 | 2,44 | 3,41 | 4,57 |
| $f_P - f_{500}$ beobachtet mm: Stab III | — | 1,02 | 1,74 | 2,56 | 3,51 | 4,71 |
| Mittelwert für die drei Stäbe mm | 0,27 | 0,94 | 1,66 | 2,48 | 3,46 | 4,64 |
| Unterschied v. H. . . . . | 0,0 | 0,0 | −1,2 | 0,0 | 0,3 | −0,2 |

Bei der Beurteilung dieser Ergebnisse muß berücksichtigt werden, daß Probestäbe, die aus derselben Pfanne gegossen sind, trotzdem recht verschiedene Dehnbarkeit aufweisen und daß deshalb auch die für die einzelnen Biegestäbe bei gleichen Abmessungen beobachteten Durchbiegungen große Abweichungen voneinander zeigen, wie die Zusammenstellung lehrt. Bei dieser Sachlage muß die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung als recht befriedigend bezeichnet werden, ist sogar bei den Stäben mit kreisförmigem Querschnitt unerwartet gut. Für das verwendete Gußeisen darf man daraus schließen, daß die der Rechnung zugrunde gelegten Annahmen gültig sind und daß es in der Tat möglich ist, aus der Dehnungskurve die bei einem Biegeversuch auftretenden Durchbiegungen voraus zu berechnen.

Ich wollte nun prüfen, ob dieses Rechnungsverfahren auch für schmiedbares Eisen zum Ziele führt, sofern die äußeren Fasern des Stabquerschnittes bei der Durchbiegung über die Streckgrenze hinaus beansprucht werden. Denn es ist für die Festigkeitslehre und für die Materialprüfung von großer Bedeutung, zu wissen, wieweit den Erscheinungen auch über die Streckgrenze hinaus, auf dem Wege der Rechnung beizukommen ist und ob es hierbei gelingt, die verwickelteren Erscheinungen der Biegung auf die einfacheren beim Zug- und Druckversuch ermittelten Gesetze zurückzuführen. Um zur Klärung dieser Fragen beizutragen, habe ich Versuche an flußeisernen Stäben ausgeführt, für die mir die Firma Friedr. Krupp das Material freundlichst zur Verfügung gestellt hat. Es bestand aus einer flußeisernen Stange von 4,2 m Länge, 105×55 mm rechteckigem Querschnitt, ausgeglüht. Daraus wurden nach der Zeichnung Fig. 2 zwei Biegestäbe $C$ und $G$, fünf Zugstäbe und zwei Druckstäbe herausgearbeitet.

Bei der Prüfung der Zug- und Druckstäbe ergaben sich die folgenden Mittelwerte:

| | |
|---|---|
| Elastizitätsmodul . . . . | 2 150 000 kg/qcm; |
| Zugfestigkeit . . . . . | 4650 „ |
| Obere Streckgrenze beim Zugversuch . . . . . | 2 920 kg/qcm; |
| Untere Streckgrenze . . | 4,7 v. H. niedriger; |
| Obere Streckgrenze beim Druckversuch . . . . | 3 200 kg/qcm; |
| Untere Streckgrenze . . | 8,7 v. H. niedriger; |
| Bruchdehnung . . . . | 26 v. H.; |
| Bruchzusammenziehung . | 66,7 v. H. |

Die Härte der Stange war nicht ganz gleichmäßig, sie nahm von links nach rechts (Fig. 2)

Fig. 2.

etwas zu. Demgemäß fielen auch die aus den einzelnen Zug- und Druckversuchen bestimmten Dehnungskurven nicht gleich aus. Zur Bestimmung der letzteren wurden größere Längenänderungen, die mit dem Martensschen Spiegelapparat nicht mehr bestimmt werden konnten, mittels zweier Mikrometerschrauben gemessen, die nach Art des Riehléschen Dehnungsmessers, doch mit einigen grundsätzlichen Änderungen angeordnet waren. Die Durchbiegungen und Biegungsendwinkel wurden sowohl aus den Dehnungskurven der Stäbe *E* und *H*, wie aus denjenigen der Stäbe *F* und *H* berechnet. Die Ergebnisse weichen, trotzdem diese Dehnungskurven nicht ganz übereinstimmen, nur wenig voneinander ab. Die endgültige Rechnung geschah daher mit den Dehnungskurven der Stäbe *E* und *H*. Die beiden Biegestäbe *C* und *G* waren bearbeitet, hatten je eine freie Auflagerlänge von 1200 mm, ihr Querschnitt war 50 mm breit und 100 mm hoch. Die Biegungsendwinkel wurden mit Hilfe von Spiegeln, die auf den Stabenden jenseits der Auflager festgeklebt waren, durch Fernrohr und Skala gemessen. Sowohl bei den Zug- und Druckversuchen, wie bei den Biegeversuchen wurden jenseits der Fließgrenze die endgültigen Ablesungen erst $^1/_2$—1 Stunde nach dem Aufbringen der Last gemacht.

Es ist zu erwarten, daß auch für die Faser des gebogenen Stabes beim Fließvorgang neben der oberen Streckgrenze eine untere Streckgrenze bemerkbar wird, d. h. daß die augenblicklich zum Fließen gebrachte Faser nach Eintritt des Streckens eine kleinere Spannung auszuüben vermag als unmittelbar vor Beginn des Vorganges. Ich habe nun die Berechnung der Durchbiegungen und Biegungsendwinkel sowohl unter der Annahme durchgeführt, daß eine untere Streckgrenze nicht vorhanden sei, d. h. daß die Dehnungskurve für die gebogene Faser von der oberen Streckgrenze aus bis zu ihrem weiteren Anstieg horizontal verlaufe, als auch unter der Annahme einer oberen und einer unteren Streckgrenze. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind für die Durchbiegungen in der Fig. 3, für die Biegungsendwinkel in der Fig. 4

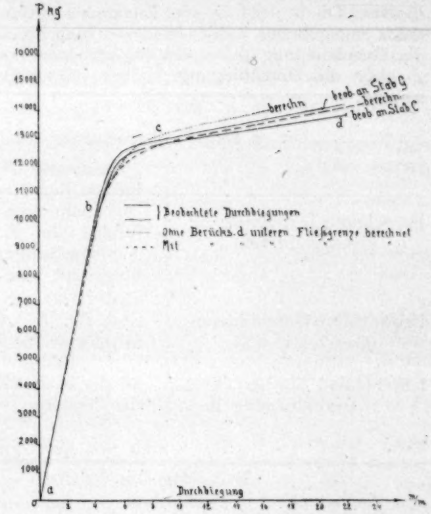



Fig. 3.

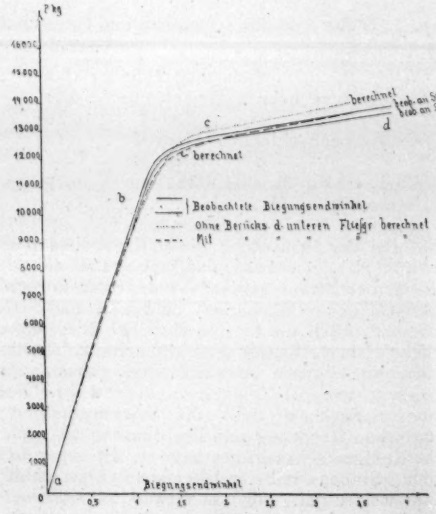



Fig. 4.

mit den Versuchsergebnissen an den beiden Biegestäben $C$ und $G$ verglichen, wobei sich das Folgende ergibt:

Die durch den Versuch gefundenen Kurven der Durchbiegungen und Biegungsendwinkel in Funktion der Belastung lassen sich in drei Teile zerlegen: einen ersten Teil $a\,b$, der vom Ursprung rasch und fast geradlinig ansteigt, einen zweiten Teil $b\,c$, bei dem die Kurve aus ihrer anfänglichen Richtung ziemlich schnell umbiegt, um in den dritten Teil $c\,d$ einzulaufen, der ganz langsam, aber nahezu geradlinig weiter ansteigt. Auch die berechneten Kurven lassen deutlich diese drei Teile erkennen. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ist beim ersten Teile gut, ebenso beim dritten Teile insofern, als er nach der Rechnung ebenfalls geradlinig ist und die gleiche Neigung besitzt wie nach der Beobachtung. Wenn man mit einer unteren Streckgrenze des Materials rechnet fällt auch in der Höhenlage der dritte Teil der berechneten Kurven sehr befriedigend mit demjenigen der beobachteten Kurven zusammen; rechnet man nur mit der oberen Streckgrenze, so liegt der dritte Teil nach der Berechnung wesentlich höher als nach der Beobachtung. Der zweite Teil der berechneten Kurven biegt langsamer um als bei den beobachteten Kurven. Immerhin aber ist die Übereinstimmung befriedigend, wenn man mit einer unteren Streckgrenze rechnet, während andernfalls die Kurve erheblich langsamer umbiegt und wesentlich höher verläuft als nach der Rechnung. Die Gestalt des zweiten Teiles und damit die Höhenlage des dritten Teiles der berechneten Kurven hängt also wesentlich davon ab, ob und mit welchem Betrag man eine untere Streckgrenze bei der Rechnung berücksichtigt. Nun ist aber die Lage der unteren Streckgrenze bei verschiedenen Zugstäben aus demselben Material bei verschiedenen Querschnittsformen, ja sogar bei gleichem Querschnitt, recht verschieden.[1]) Bei dieser Sachlage wird man die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung, wie sie sich unter Berücksichtigung einer unteren Streckgrenze ergibt, auch für den zweiten Teil sehr befriedigend finden.

Wir kommen also zu dem Schlusse, daß für die vorliegenden Biegestäbe aus Flußeisen der Verlauf des Biegeversuches hinsichtlich der Durchbiegungen und Biegungsendwinkel auf Grund der Dehnungskurve des Materials auch über die Streckgrenze hinaus ziemlich zuverlässig vorausberechnet werden kann und daß die Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung ungefähr von derjenigen Größenordnung sind, die sich für die Abweichungen in der Bestimmung der oberen und der unteren Streckgrenze bei verschiedenen Stäben aus demselben Material und auch hinsichtlich örtlicher Verschiedenheiten in demselben Stabe findet.

Auf eines ist noch hinzuweisen. Man kann auch bei Biegeversuchen von einer Streckgrenze sprechen, indem man darunter diejenige Belastung versteht, bei welcher der zweite Teil $b\,c$ der Kurven beginnt, wo also die Zunahme der Durchbiegungen und Winkel plötzlich sehr viel größer wird als vorher. Gerade an dieser Stelle beginnt auch der Einfluß der Zeit gut bemerkbar zu werden. Rechnet man aus der Belastung an dieser Grenze mittels der einfachen Biegungsformel $\sigma = \frac{M_b e}{\mathcal{J}}$ die größte im Biegestab auftretende Randspannung aus, so findet man für die Stäbe $C$ und $G$ je 4400 kg/qcm, während sich im Mittel aus den Zug- und Druckversuchen als obere Streckgrenze eine Spannung von rund 3000 kg/qcm ergeben hatte. Scheinbar liegt also beim Biegeversuch die Streckgrenze um gegen 47 v. H. höher als beim Zug- und Druckversuch. Diese Erhöhung ist aber nur scheinbar, denn auch bei den berechneten Biegungskurven, welche doch die beim Zug- und Druckversuche beobachteten Dehnungs- und Streckungserscheinungen zur Grundlage haben, liegt der Übergang des ersten Teiles der Kurve zum zweiten etwa bei derselben Belastung wie bei den beobachteten Kurven. Dies erklärt sich daraus, daß der erste Beginn der Fließvorgänge im gebogenen Stabe in der Durchbiegung und Neigung der elastischen Linie noch nicht zum deutlich sichtbaren Ausdruck gelangt, da zunächst nur die äußersten Fasern und auch diese nur auf eine sehr geringe Länge in der Nähe des gefährlichen Querschnittes davon ergriffen werden.

1) Vgl. C. Bach, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 615 ff.

(Eingegangen 8. Oktober 1907.)

# BESPRECHUNGEN.

**W. Nernst, Theoretische Chemie. Vom Standpunkte der avogadroschen Regel und der Thermodynamik.** 5. Aufl. gr. 8. XVI u. 784 S. mit 49 Abbildungen. Stuttgart, F. Enke. 1907. M. 18.60

Nernsts „Theoretische Chemie" ist in den Kreisen unserer Leser ein so wohlbekanntes Buch, daß sich jede eingehende Beurteilung und Empfehlung des Werkes an dieser Stelle erübrigt. So sei denn lediglich darauf hinge-

wiesen, daß die neue Auflage in erster Linie dadurch gegen die vorige vervollständigt ist, daß die mannigfaltigen neuen Gesichtspunkte, welche sich aus den neuen Arbeiten Nernsts über die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen ergeben haben, in den ganzen Aufbau des Werkes hineinverarbeitet sind. E. Bose.

**C. Burrau, Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus. Mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument (Kreis- und Hyperbelfunktionen).** gr. 8. XX u. 63 S. Berlin, Georg Reimer. 1907. M. 4.—

Diese Tafeln sind in erster Linie gedacht als Hilfsmittel zur numerischen Berechnung gewisser periodischer Lösungen im Dreikörperproblem, doch wird man sie auch bei Gebrauch der Rechenmaschine mit Vorteil benutzen können. Die Übersichtlichkeit des Druckes leidet etwas an dem sehr geringen Durchschuß der Zeilen.

E. Przybyllok.

**H. Thiene, Temperatur und Zustand des Erdinnern.** Eine Zusammenstellung und kritische Beleuchtung aller Hypothesen. gr. 8. Jena, Gust. Fischer. 1907. M. 2.50.

Verfasser hat eine Sammlung des gesamten Materiales an Arbeiten, die sich auf die Temperatur und den Zustand des Erdinnern beziehen, vorgenommen. Nach einer einleitenden historischen Übersicht über die Hypothesen bis zum Jahre 1870, referiert er dann eingehender über die neueren Arbeiten. Den Schluß bildet ein umfangreiches Literaturverzeichnis.

E. Przybyllok.

**H. Spyri, Die Antriebsmotoren für elektrische Stromerzeuger.** Handbuch zum Gebrauch für Elektrotechniker. gr. 8. VIII u. 230 S. mit 92 Abbildungen im Text und auf Einschalttafeln. Leipzig, Joh. Ambr. Barth. 1907. M. 5,80, gebunden M. 6,60

Der Verfasser behandelt in knapper und doch anschaulicher Form die Gesichtspunkte, die bei der Wahl des Antriebssystems von elektrischen Zentralen und Einzelbetrieben in Frage kommen. Es werden die charakteristischen Merkmale der Wasserturbinen, der Kolben- und Turbinendampfmaschinen, sowie der Explosionsmotoren besprochen und die Grundlagen für deren Größenbestimmung angegeben. Unterstützt werden diese Ausführungen durch eine überaus reichhaltige Beigabe von Tabellen gängiger Maschinentypen und praktischer Erfahrungswerte, die man sonst schwer so ausführlich zusammengestellt findet. Gute Abbildungen und auch Schnittzeichnungen illustrieren den Text. Der Wunsch des Verfassers ist, daß es demjenigen Elektrotechniker, der nicht auch Fachmann auf dem Gebiete des Kraftmaschinenbaues ist, mit Hilfe dieses Buches gelingen möge, die Frage der zweckmäßigsten Betriebskraft seiner Dynamos zu entscheiden. Wenn auch dieses Problem, das ja heute im Mittelpunkte des Interesses steht, in Wirklichkeit nur durch eine sehr viel eingehendere Berücksichtigung aller örtlichen Verhältnisse und durch ganz exakte Rentabilitätsberechnungen gelöst werden kann, so bieten die gebotenen Angaben doch eine gute Unterlage für die später nötigen ausführlichen Erwägungen. R. Rüdenberg.

**Th. Hofmeister, Der Gummidruck und seine Verwendbarkeit als künstlerisches Ausdrucksmittel in der Photographie.** Zweite, umgearbeitete Auflage. gr. 8. IV u. 37 S. Halle a. S., Wilhelm Knapp. 1907. M. 2,—.

Von allen Büchern über den Gummidruck ist das vorliegende gewiß das kürzeste und läßt daher an Knappheit und Übersichtlichkeit nichts zu wünschen übrig. Dabei ist es — in Form eines Vortrags — sehr flott, oft fesselnd geschrieben, so daß das Heft als erste Anleitung zur Erlernung des Gummidruckverfahrens warm empfohlen werden kann.

Riesenfeld.

## Personalien.

**(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)**

**Habilitiert:** An der Technischen Hochschule Berlin Dr. E. Salkowski für darstellende Geometrie, an der Universität Breslau Dr. Karl Löffler für Chemie, an der Technischen Hochschule Karlsruhe Regierungsbaumeister O. Ammann für Elemente des Ingenieurwesens.

**Ernannt:** Der a. o. Professor der Chemie an der Universität Graz Dr. Hugo Schrötter zum ord. Professor ebenda, der a. o. Professor der Physik an der deutschen Universität Prag Dr. Josef Tuma zum ord. Professor ebenda.

**Berufen:** Dr. Richard Zsigmondy zum a. o. Professor für anorganische Chemie an der Universität Göttingen an Stelle von Prof. Dr. Gustav Tammann, der die ord. Professur für physikalische Chemie daselbst übernimmt, Dr. S. Valentiner als Dozent für Physik an der Technischen Hochschule Hannover zur Vertretung von Professor Dr. Johannes Stark, welcher an Stelle von Professor Dr. Hermann Starke an die Universität Greifswald berufen wurde.

**Gestorben:** Der frühere ord. Professor für Maschinenwesen und Mechanik an der Technischen Hochschule Dresden Geh. Rat Dr. Gustav Zeuner.

Für die Redaktion verantwortlich: Professor Dr. Emil Bose in Oliva bei Danzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.